



VI Congreso Iberoamericano de Acústica - FIA 2008
Buenos Aires, 5, 6 y 7 de noviembre de 2008

FIA2008-A015

Acoplamiento acústico de una formación de resonadores Helmholtz con los modos de un tubo de dimensión finita

Cintia Sposetti^(a),
Reinaldo Welti^(a),

(a) Laboratorio de Vibraciones y Ondas, Departamento de Física y Química de la Escuela de Formación Básica, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario. Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario, Argentina. E-mail: welti@fceia.unr.edu.ar

Abstract

Helmholtz resonators (HR) are often used as a narrowband sound absorption device in the noise control of a reverberant enclosure. This paper focuses on the theoretical and experimental effect of the lateral insertion of two or more HR on the normal modes of oscillation of a finite tube. By choosing appropriate frequencies and distances between HR can get an adequate control over a frequency bandwidth relatively large and previously established.

Resumen

Los resonadores Helmholtz (RH) se utilizan en una variedad de aplicaciones para reducir el nivel de ruido en una banda estrecha de frecuencias. En este trabajo se estudia teórica y experimentalmente el efecto de la inserción lateral de una formación de RH sobre los modos normales de oscilación de un tubo finito. Eligiendo adecuadamente las frecuencias y las distancias entre los RH se puede obtener un adecuado control sobre una banda de frecuencia relativamente grande y previamente establecida.

1 Introducción

La interacción acústica entre un recinto cerrado con un resonador Helmholtz (RH) que se encuentra en su interior ha sido investigado por varios autores [1- 4]. Van Leeuwen [2] examinó el acoplamiento entre un modo del recinto y un resonador Helmholtz. Fahy and Schofield [1] han realizado trabajos teóricos y experimentales para mejorar el trabajo de Ref. [2]. En Ref. [1] se supone que la separación promedio entre las frecuencias de resonancia del recinto es lo suficientemente grande que excede el ancho promedio de los modos. Por ese motivo, solamente el modo blanco particular (el que se busca atenuar) fue tenido en cuenta en el análisis del acoplamiento. Esto supone implícitamente que todos los demás modos del recinto, debido a su gran separación, no son afectados por la presencia del RH. Basados en este supuesto se obtuvieron resultados, que son muy útiles para entender el mecanismo de absorción del resonador, y que permiten conseguir un diseño más óptimo del RH. Sin embargo, en la mayoría de los casos, los modos acústicos de un recinto no están muy separados en frecuencia y, en algunas aplicaciones prácticas, puede ser necesario el uso de múltiples resonadores para controlar varios modos separadamente. Para tener estas situaciones en cuenta, los modelos teóricos tendrían que incluir muchos modos del recinto que interactúan con una formación de RH.

Recientemente, Li y Cheng [5], han elaborado un modelo que permite estudiar analítica y numéricamente el acoplamiento entre muchos modos del recinto y un RH. En este trabajo, se estudia el acoplamiento entre todos los modos de un recinto muy simple, un tubo abierto o cerrado en ambos extremos, y una formación de RH. Los resultados, cuando los modos del tubo interactúan con un solo RH, muestran un remarcable acuerdo con los que se obtienen en [1]. En particular se encuentra que la inserción de un RH, con un amortiguamiento débil, divide la frecuencia de resonancia blanco en dos nuevas frecuencias acopladas, y se produce un corrimiento de las otras frecuencias de resonancias, sobre todo, las vecinas. El modelo propuesto es una herramienta útil y muy simple para la localización óptima, las frecuencias y los amortiguamientos de los RH que permiten obtener un mejor control sobre una banda de frecuencia relativamente grande y previamente establecida. Se presentan también algunos resultados experimentales.

2 Análisis teórico y experimental de el efecto que produce la inserción de múltiples RH en los modos de oscilación de un tubo abierto en sus dos extremos

2.1 Efecto del RH sobre los modos de oscilación de un tubo abierto en sus dos extremos

En esta sección vamos a deducir la expresión para la amplitud de respuesta en el dominio de las frecuencias de un tubo abierto en sus dos extremos que tiene insertado en sus paredes laterales un RH como se muestra en la figura 1. La comparación de las amplitudes de respuesta del tubo, con o sin el RH, permite cuantificar el comportamiento del RH como filtro.

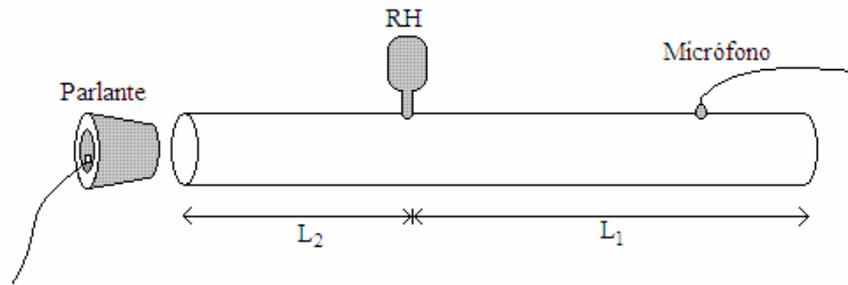


Figura 1. Esquema de un tubo de extremos abiertos con un RH insertado lateralmente

2.1.1 Cálculo de la admitancia de entrada

La amplitud de respuesta del tubo es directamente proporcional a la admitancia de entrada del tubo (la inversa de la impedancia de entrada). Para calcular la impedancia de entrada del tubo es conveniente convertir al sistema de la figura 1 en un sistema eléctrico análogo, en el cual el movimiento del fluido es equivalente a la corriente en una línea de transmisión eléctrica. El análogo eléctrico de la presión p es la tensión, y un análogo acústico de la corriente es el flujo de volumen $U = Su$, donde u es la velocidad del fluido y S la sección del tubo.

La impedancia acústica del tubo Z_0 (el equivalente a la impedancia característica de una línea de transmisión eléctrica) es el cociente entre la presión acústica p y el flujo de volumen U , $Z_0 = p/U$.

En el extremo del tubo, que está abierto a la atmósfera, la presión acústica es siempre cero (si no se tiene en cuenta la radiación del sonido). Puede, por lo tanto, considerarse como un “corto circuito”, esto es, como un elemento de impedancia acústica cero.

En la figura 2 se muestra el circuito eléctrico equivalente del dispositivo que se muestra en la figura 1. Para calcular la impedancia de entrada de este sistema debemos calcular la impedancia en paralelo Z_p entre la impedancia Z_l del tubo de longitud L_1 que termina en una impedancia acústica Z_L y el resonador Helmholtz que tiene una impedancia Z_H . Finalmente la impedancia de entrada Z_e es la de un tubo de longitud L_2 que termina en una impedancia Z_p .

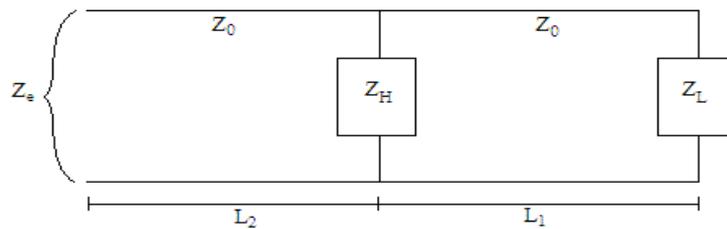


Figura 2. Circuito eléctrico equivalente del sistema acústico representado en la figura 1

La impedancia Z_l del tubo de longitud L_1 que termina en la impedancia Z_L es

$$Z_1 = Z_0 \frac{\frac{Z_L}{Z_0} + j \tan kL_1}{1 + j \frac{Z_L}{Z_0} \tan kL_1} \tag{1}$$

donde $Z_0 = \rho_0 c/S$ es la impedancia acústica del tubo, ρ_0 la densidad del aire, c la velocidad del sonido, $k = 2\pi/\lambda$ el número de onda y λ la longitud de onda.

La impedancia Z_p del paralelo entre la impedancia Z_1 y la impedancia del resonador es:

$$Z_p = \frac{Z_1 Z_H}{Z_1 + Z_H} \quad (2)$$

La impedancia de entrada Z_e , es la impedancia de un tubo de longitud L_2 que termina en la impedancia Z_p , esto es:

$$Z_e = Z_0 \frac{\frac{Z_p}{Z_0} + j \tan kL_2}{1 + j \frac{Z_p}{Z_0} \tan kL_2} \quad (3)$$

Si reemplazamos (1) y (2) en (3) obtenemos:

$$Z_e = Z_0 \frac{\frac{Z_1}{Z_0} + j \tan kL_2 + j \frac{Z_1}{Z_H} \tan kL_2}{1 + j \frac{Z_1}{Z_0} \tan kL_2 + \frac{Z_1}{Z_H}} \quad (4)$$

Si el extremo derecho del tubo está abierto, $Z_L = 0$, entonces:

$$Z_1 = jZ_0 \tan kL_1 \quad (5)$$

Reemplazando (5) en (4) obtenemos

$$Z_e = Z_0 \frac{j \tan kL_1 + j \tan kL_2 - \frac{Z_0}{Z_H} \tan kL_1 \tan kL_2}{1 - \tan kL_1 \tan kL_2 + j \frac{Z_0}{Z_H} \tan kL_1} \quad (6)$$

Trabajando algebraicamente y utilizando identidades trigonométricas se obtiene:

$$Z_e = jZ_0 \frac{\sin kL + j \frac{Z_0}{Z_H} \sin kL_1 \sin kL_2}{\cos kL + j \frac{Z_0}{Z_H} \sin kL_1 \cos kL_2} \quad (7)$$

donde $L = L_1 + L_2$ es la longitud total del tubo.

Si se retira el RH de las paredes del tubo, ($Z_H \rightarrow \infty$), la ecuación (7) se reduce a la impedancia de entrada de un tubo abierto de longitud L .

2.1.2 Impedancia del Resonador Helmholtz

La impedancia de una porción de un sistema acústico de dimensiones pequeñas comparadas con la longitud de onda (equivalente a un elemento de parámetros concentrados) es el cociente entre la diferencia de presión p que se está ejerciendo sobre este elemento y el flujo de volumen resultante U . El resonador Helmholtz es un sistema acústico de pequeña

dimensión comparada con la longitud de onda. Con esta suposición, la “resistencia normalizada” y la “reactancia normalizada” de un resonador Helmholtz viene dada por [6],

$$x_H = \frac{X_H}{Z_0} = \kappa \left(\frac{f}{f_H} - \frac{f_H}{f} \right) \quad \text{y} \quad r_H = \frac{R_H}{Z_0} \quad (8)$$

donde κ es una constante adimensional que depende de los parámetros del RH y del tubo. La resistencia de un resonador Helmholtz se debe principalmente a las pérdidas viscosas en el cuello. Existen expresiones teóricas para κ y r_H , pero éstas dan solamente idea sobre sus órdenes de magnitud. En este trabajo calculamos κ y r_H experimentalmente siguiendo el procedimiento propuesto por Guiguet y Welti [7]. Para los RH que utilizamos en este trabajo encontramos que κ varía entre 1,5 y 1,8 mientras que los valores de r_H están entre 0,08 y 0,2. Estos son los valores que utilizamos en nuestros cálculos de las siguientes secciones.

2.1.3 Modos resonantes de un tubo acoplado con un RH

Si la impedancia del parlante es pequeña, éste entrega la máxima potencia en las frecuencias para las cuales el módulo de la admitancia de entrada del tubo, $Y_e = 1/Z_e$, es máxima (ver figura 2). Estas frecuencias son las frecuencias de resonancia del sistema. En la figura 3 se muestra la amplitud de respuesta del sistema formado por un tubo de longitud $L = 0,95$ m y 2,5 cm de diámetro, y un RH de frecuencia $f_H = 347$ Hz (muy próxima de la frecuencia del segundo modo del tubo) insertado lateralmente a una distancia $L_2 = 0,25$ m del parlante (ver figura 2). Hemos elegido para κ el valor 1,5 y para r_H los valores 0,1, 1 y 5. En la figura 3, en líneas llenas, se muestra la amplitud de respuesta del tubo sin el RH y con líneas de punto la amplitud de respuesta del tubo con el RH.

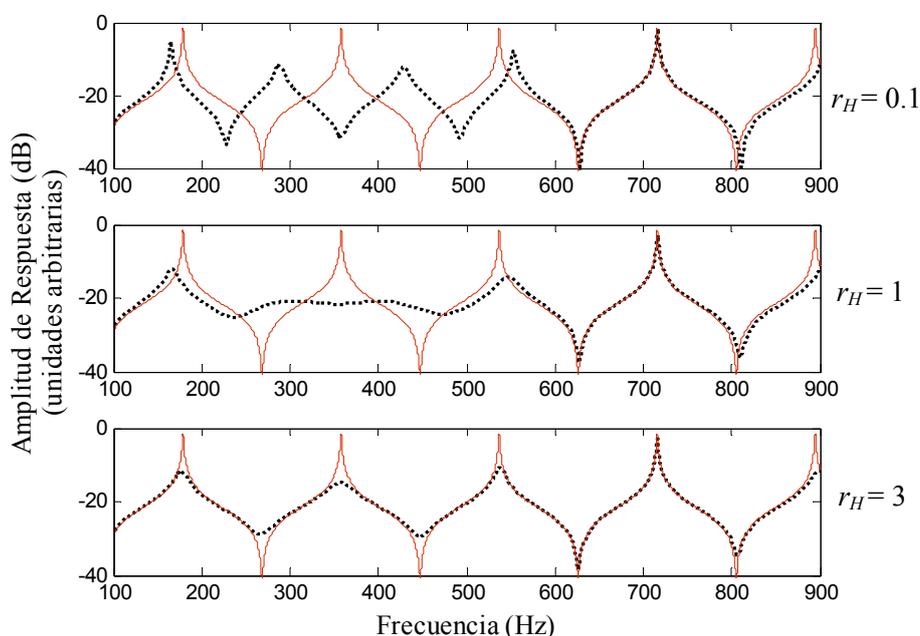


Figura 3. Trazo continuo: amplitud de respuesta de un tubo con extremos abiertos, para tres valores de r_H . Trazo con puntos: amplitud de respuesta de un tubo al cual se le insertó un RH con una f_H cercana a la frecuencia del segundo modo del tubo, para tres valores de r_H .

Si $r_H = 0.1$, el pico del modo 2, de 358 Hz se divide en dos picos, (288 y 429 Hz) de aproximadamente el mismo nivel, que se ubican en forma simétrica alrededor del pico original. Si $r_H = 1$, se observa, en la figura 2, que en un rango de frecuencia que va de 200 a 520 Hz la amplitud de respuesta es casi plana y relativamente baja.

Cuando $r_H = 3$, desaparecen totalmente los dos picos laterales alrededor de la frecuencia blanco y se comienza a regenerar la forma de la amplitud de respuesta del tubo en ausencia del RH. En efecto, si hacemos $r_H = 10$, las dos curvas, en líneas llenas y de puntos (no se muestra esta situación en la figura 3), se superponen totalmente en toda la gama de frecuencias. Cuando la resistencia del RH es muy grande, la amplitud de las oscilaciones del oscilador se hace muy pequeña y la potencia que absorbe tiende a cero. Si $r_H < 0.1$, los dos picos laterales alrededor de la frecuencia blanco son muy altos, lo cual puede ocasionar un incremento, más que a una reducción del nivel del ruido. Estos resultados muestran, por lo tanto, que el desempeño del RH en la reducción del nivel de ruido alrededor de la frecuencia blanco, se hace óptima para un cierto valor de la resistencia. Nuestro estudio no permite evaluar analíticamente el valor de esta resistencia pero si puede determinarlo numéricamente para cada caso particular. Es interesante mencionar que, cuando se quiere reducir las vibraciones de sistemas mecánicos de uno o más grados de libertad insertando a la estructura un oscilador, se encuentra exactamente el mismo comportamiento respecto de la resistencia del oscilador que se utiliza para conseguir la reducción de las vibraciones [8] [9].

2.1.4 Modos resonantes de un tubo acoplado con dos o más RH

El procedimiento de la sección 2.1.1 para calcular la admitancia de entrada de un tubo acoplado con un RH puede generalizarse para estudiar el acoplamiento entre el tubo y un número cualquiera de RH insertados. En la figura 4 se muestra el efecto de la inserción de dos RH de frecuencias $f_{Ha} = 347$ Hz y $f_{Hb} = 540$ Hz, a distancias $L_{1a} = 0.25$ y $L_{1b} = 0.50$ m del extremo libre de la derecha.

En la figura 4 (a) y 4 (b) se observa el efecto que produce cada uno de los RH actuando solos, y en la figura 4 (c) cuando están presentes los dos RH simultáneamente. Se puede observar una reducción del nivel de intensidad del sonido en más de 10 dB en un intervalo de frecuencias que va desde 200 hasta 750 Hz. Esto muestra que la inserción simultánea de más de un RH de frecuencias diferentes puede conseguir una disminución del nivel de ruido en un intervalo de frecuencias relativamente grande.

2.2 Desarrollo experimental

2.2.1 Dispositivo experimental

El dispositivo experimental consistió en un tubo de PVC de 0.95 m de largo y 1 pulgada de diámetro, al cual se le realizaron diversas perforaciones en las cuales se insertaron los resonadores Helmholtz. Se excitó el sistema con una señal de ruido blanco generado por el software Audacity 1.2.6 y se registró la señal de respuesta con un micrófono SM DS 70P Sony Hi-Fi Stereo, el cual se conectó a una grabadora de Minidisc Sony MZ.

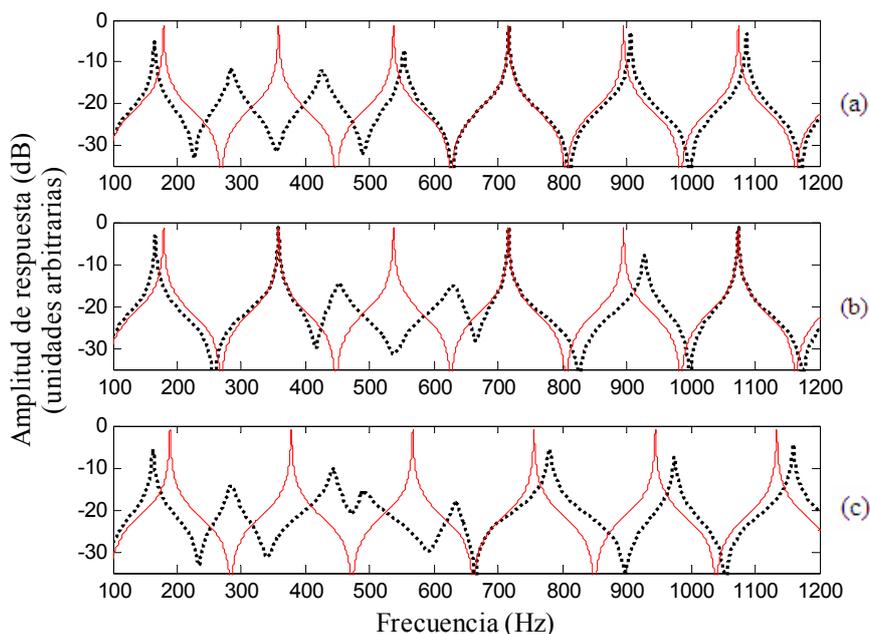


Figura 4. Amplitud de respuesta del tubo con extremos abiertos al cual se le insertó en (a) un RH de $f_H=347$ Hz, (b) un RH de $f_H=540$ Hz, (c) ambos RH simultáneamente.

Primero se midió la respuesta, del tubo con extremos abiertos, al ruido blanco para determinar las frecuencias de resonancias del sistema, posicionando el micrófono a 0,75 m del extremo de entrada. Luego se midió la respuesta del sistema, con la inclusión de un RH cuya frecuencia de resonancia coincida aproximadamente con la segunda frecuencia de resonancia del tubo. Este resonador se insertó a 0,25 m del extremo de entrada, de manera que esté cercano a un antinodo de presión del segundo modo de resonancia del tubo. En un tercer paso se registró la respuesta del sistema con otro RH que coincida aproximadamente con la tercera frecuencia de resonancia del tubo, colocándolo a 0,50 m del extremo de entrada. Por último se midió la respuesta del sistema con la inclusión de ambos RH, ubicados en las mismas posiciones descritas anteriormente.

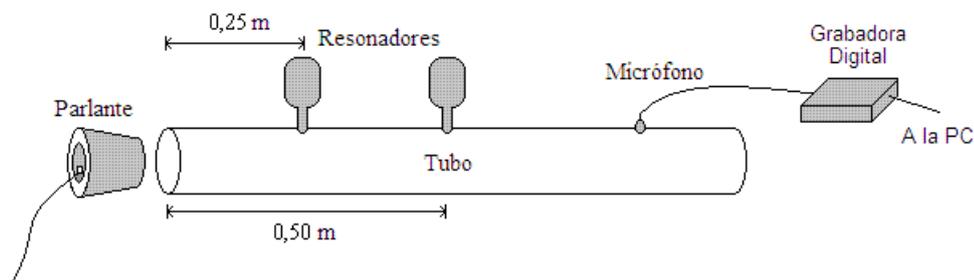


Figura 5. Esquema del dispositivo experimental utilizado.

2.2.2 Resultados

En la figura 6 se observan las frecuencias de resonancias del tubo con extremos abiertos. Allí se pueden ver las frecuencias del segundo, tercer y cuarto modo del sistema que son las de interés para este trabajo (ver tabla 1).

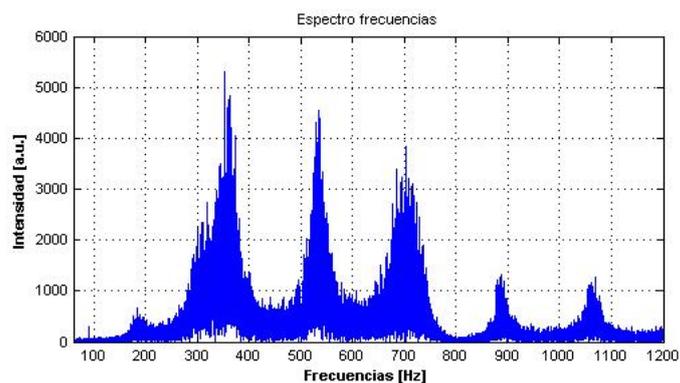


Figura 6. Amplitud de respuesta del tubo con extremos abiertos

En la figura 7 se observa como se modifican las frecuencias de resonancia del sistema al insertarle un resonador con una frecuencia de 347 Hz. Se puede ver como el pico correspondiente al segundo modo se desdobra en dos nuevos picos ubicados 60 Hz a ambos lados de la frecuencia original (ver tabla 1). Al mismo tiempo el tercer modo sufre un leve desplazamiento hacia una frecuencia mayor, mientras que el cuarto modo permanece inalterado.

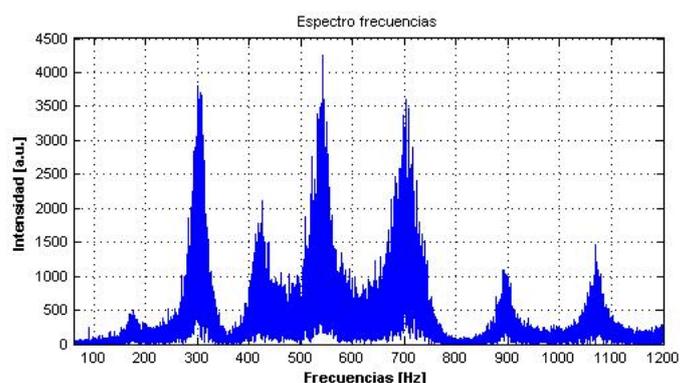


Figura 7. Amplitud de respuesta del tubo con extremos abiertos con la inserción de un RH de $f_H=347$ Hz.

En la figura 8 se observa como se modifican las frecuencias de resonancia del sistema al insertarle un resonador con una frecuencia de 540 Hz. Se puede ver como el pico correspondiente al tercer modo se desdobra en dos nuevos picos ubicados a ambos lados de la frecuencia blanco, cuyas intensidades son cuatro veces menores. Al mismo tiempo el segundo modo sufre un leve desplazamiento hacia una frecuencia menor, mientras que el cuarto se desplaza hacia frecuencias mayores (ver Tabla 1).

Tabla1. Frecuencias de resonancias medidas de los primeros modos para las distintas configuraciones.

Modo	Frecuencias de resonancias (Hz)			
	Tubo sin RH	RH de 347 Hz	RH de 540 Hz	RH de 347 Hz y 540 Hz
2	361	301	352	302
		418		418
3	532	540	494	503
			615	613
4	702	702	707	709

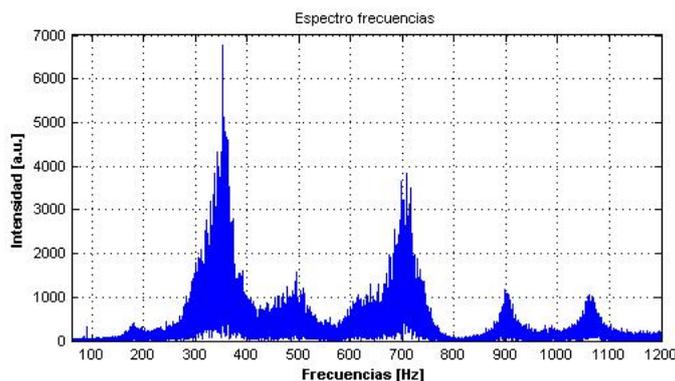


Figura 8. Amplitud de respuesta de un tubo con extremos abiertos con la inserción de un RH de $f_H=540$ Hz.

Por último, en la figura 9, se puede observar como se modifican las frecuencias de resonancia del sistema al insertarle ambos resonadores. En este caso tanto el segundo como el tercer modo se desdoblaron en dos picos nuevos, las frecuencias de éstos coinciden con las observadas cuando los resonadores fueron insertados por separado. Nuevamente el cuarto modo sufre un leve desplazamiento hacia una frecuencia mayor. Es decir no hay una interacción apreciable entre los resonadores.

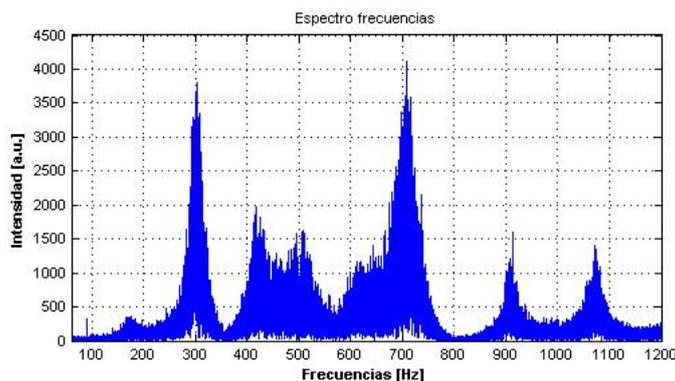


Figura 9. Amplitud de respuesta de un tubo con extremos abiertos con la inserción de ambos RH

Al comparar las predicciones obtenidas mediante el modelo teórico propuesto, para determinar el efecto de la inserción lateral de resonadores Helmholtz en un tubo, con los resultados obtenidos experimentalmente se encuentra un satisfactorio acuerdo, tanto en el desdoblamiento de las frecuencias blanco como en el corrimiento de los modos cercanos a dicha frecuencia.

3 Conclusiones

En este trabajo se presenta un modelo simple para analizar el acoplamiento acústico entre un recinto (en este caso un tubo) y una formación de resonadores Helmholtz. Utilizando este modelo se pueden calcular las variaciones en la amplitud de respuesta producidas por la inserción lateral de uno o varios resonadores. La interacción de un solo RH con su frecuencia blanco en el interior del recinto, cuya amplitud se pretende reducir, se puede aproximar como la interacción entre dos osciladores. Esto explica porqué la inserción del resonador divide a la

frecuencia blanco en dos nuevas frecuencias acopladas. Es como si la inserción del resonador aumentara en uno, el número de grados de libertad del sistema, y por lo tanto en uno el número de modos. Estas variaciones de frecuencia pueden ser calculadas exactamente mediante este modelo. La posición de los resonadores afecta significativamente el acoplamiento acústico y, por lo tanto, el desempeño de los RH para controlar el nivel de ruido. Este modelo puede ser utilizado para determinar la posición óptima del resonador para limitar el nivel de ruido de una resonancia que está fuera del blanco, lo que permitiría alcanzar un mejor control de ruido sobre una ancha banda de frecuencias. Para aplicaciones en reducción del ruido en grandes recintos es necesario encontrar la ley de escala entre la sección y longitud del recinto, con las dimensiones del RH y su coeficiente de disipación.

Referencias

- [1] F.J. Fahy; C. Schofield, (1980), "A note on the interaction between a Helmholtz resonator and an acoustic mode of an enclosure", *Journal of Sound and Vibration* (72) 365–378.
- [2] F.J. Van Leeuwen, (1960), "The damping of eigen-tones in small rooms by Helmholtz resonators", *European Broadcasting Union Review, A—Technical* (62) 155–161.
- [3] H.R. Britz; H.F. Pollard, (1978); "Computational analysis of coupled resonators", *Journal of Sound and Vibration* (60) 305–307.
- [4] A. Cummings, (1992), "The effects of a resonator array on the sound field in a cavity", *Journal of Sound and Vibration* (154) 25–44.
- [5] D. Li; L. Cheng, (2007), "Acoustically coupled model of an enclosure and a Helmholtz resonator array", *Journal of Sound and Vibration* (305) 272–288
- [6] Kinsler, L. E.; Frey A. R., Coppens A. B. y J. V. Sanders, (1982), "Fundamentals of Acoustics", tercera edición John Wiley & Sons.
- [7] Guiguet, A.; Welti, R., (2003), "Supresión de modos de vibración acústicos con un resonador Helmholtz". *Revista Brasileira Ensino Física* (25) 3 287-293.
- [8] A. Soom; M.S. Lee, (1983), "Optimal design of linear and non linear absorbers for damped systems", *Journal of Vibrations, Acoustics, Stress and reliability in Design*, (105) 112-119.
- [9] S.S. Rao, (1995), "Mechanical Vibrations", Addison-Wesley Publishing Company, Massachussets.