

ABSORCIÓN PERFECTA DE BAJA FRECUENCIA POR PANELES ACÚSTICOS ULTRAFINOS BASADOS EN METAMATERIALES

PACS: 43.50

Noé Jiménez¹, Vicent Romero-García, Vincent Pagneux, Jean-Philippe Groby

¹ Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine, UMR CNRS 6613,

Av. Olivier Messiaen

72000 Le Mans, France

E-mail: nojigon@upv.es

Palabras Clave: metamaterial, absorbente, resonador de Helmholtz.

ABSTRACT

The propagation of acoustic waves inside structured materials can be extraordinary modified by using subwavelength size resonant inclusions. Those structures are named *metamaterials*. In this work, we study acoustic panels based on metamaterials specially designed to show perfect sound absorption by using the critical coupling of the structure to the exterior medium. We report perfect absorption produced by both, rigid backed panels and panels including ventilation and holes, where the flux of air is allowed through the structure. The structures are made by a rigid panel perforated by slits. Each slit is loaded by a set of Helmholtz resonators, producing slow-sound conditions. Thus, the slits become deep subwavelength resonators. The system is analyzed theoretically using the transfer matrix method and a modal expansion, including the thermoviscous effects. The first method allows to study the effects of the discrete number of resonators, while the second one allows to derive the effective parameters of the system. A finite element method including thermoviscous losses and experiments were used to validate the results. The designed panels show a thickness of between 40 and 88 times smaller than the wavelength in the case of monochromatic absorption (300 Hz), and 10 times smaller than the wavelength in the case of broadband absorption (10 cm for perfect absorption between 300 Hz and 1 kHz). The experimental results using 3D printed samples show perfect agreement between the analytical and numerical predictions, allowing its practical application for noise control.

RESUMEN

La propagación de ondas acústicas en el interior de materiales estructurados puede ser modificada extraordinariamente mediante la introducción de elementos resonantes con dimensiones mucho más pequeñas que la longitud de onda de su frecuencia de resonancia. Dichas estructuras se denominan *metamateriales*. En este trabajo presentamos paneles acústicos basados en metamateriales especialmente diseñados para presentar absorción acústica perfecta mediante el acoplo crítico de la estructura con el medio exterior. Presentamos absorción perfecta producida tanto por paneles situados sobre paredes perfectamente rígidas, como en paneles con ventilación donde se permite el flujo de aire a través de la estructura. Los paneles están formados por un panel rígido ranurado, donde sobre cada ranura se sitúa un array de resonadores de Helmholtz que produce propagación lenta. Así, cada ranura se comporta como un resonador más pequeño que la longitud de onda. El sistema es analizado analíticamente mediante dos métodos: la matriz de transferencia y una expansión modal, incluyendo en ambos las pérdidas termoviscosas. El primero permite incluir los efectos finitos de la estructura y el segundo los parámetros efectivos del sistema. El método de los elementos finitos incluyendo pérdidas termoviscosas se ha empleado para verificar las aproximaciones analíticas de ambos modelos. Los paneles diseñados presentan un grosor entre 40 y 88 veces más pequeño que la longitud de onda absorbida en el caso de absorción monocromática (300 Hz), y 10 veces más pequeño que la longitud de onda en el caso de paneles absorbentes de gran ancho de banda (10 cm para absorción perfecta entre 300 y 1000 Hz). Los resultados experimentales en estructuras impresas en 3D muestran un perfecto acuerdo entre las predicciones

numéricas y analíticas, demostrando las posibilidades de aplicación de dichos paneles para el control de ruido.

1. INTRODUCCIÓN

En ingeniería acústica se emplean, básicamente, dos tipos de paneles para el control del sonido. En primer lugar, los tratamientos anecóicos, y en segundo, materiales para reducir la transmisión acústica. El primer tipo de materiales requiere que el coeficiente de reflexión de la superficie sea nulo. Esto ha sido tradicionalmente conseguido mediante el uso de materiales porosos y fibrosos, que son principalmente eficientes en el régimen inercial y para frecuencias superiores a la denominada resonancia de cuarto de onda, es decir cuando $f = c/4L$, donde la velocidad del sonido en el material poroso, c , es del orden de la velocidad del sonido en el aire, siendo L el espesor del material [1]. Por otro lado, una solución típica para la reducción de la transmisión del sonido se obtiene mediante el uso combinado de varios paneles rígidos altamente reflectantes con láminas de material poroso entre ellos. Estas estructuras son particularmente eficientes para frecuencias superiores a los modos Fabry-Pérot de la lámina de material equivalente, $f = c/2L$. Por ello, ambos tipos de materiales resultan en limitaciones prácticas debido al excesivo espesor necesario, L , cuando se trata de manipular sonido de baja frecuencia. De particular interés es el diseño de materiales simultáneamente anecóicos y con transmisión nula, es decir, absorbentes perfectos para problemas con transmisión acústica.

En el caso de problemas en reflexión, los metamateriales acústicos son soluciones eficientes para el diseño de absorbentes que pueden presentar simultáneamente un grosor más pequeño que la longitud de onda y absorción perfecta. Estos incluyen los materiales meta-porosos [2-4], materiales compuestos por membranas [5-7], resonadores de cuarto de onda [8,9] y resonadores de Helmholtz [10-11]. Mediante el empleo de dispersión fuerte, se puede reducir la velocidad del sonido en el interior del material (propagación lenta), reduciendo enormemente la frecuencia de resonancia de la cavidad y reduciendo por tanto el espesor del material [9,10].

En el caso de los problemas en transmisión, la absorción perfecta del sonido de manera selectiva en frecuencia ha sido observada recientemente usando metamateriales con membranas decoradas [12], resonadores acoplados en una guía de ondas [13], o mediante el uso de un array de resonadores produciendo absorción *quasi*-perfecta [14]. Sin embargo, para la configuración en transmisión, el problema de la absorción perfecta cubriendo un gran ancho de banda no ha sido resuelto hasta la fecha.

En este trabajo se presentan absorbentes acústicos basados en metamateriales especialmente diseñados para presentar absorción acústica perfecta en un gran ancho de banda mediante el acoplo crítico de la estructura con el medio exterior. Así, presentamos absorción perfecta producida tanto por paneles situados sobre paredes perfectamente rígidas (problema en reflexión), como en paneles con ventilación donde se permite el flujo de aire a través de la estructura (problema en transmisión). En particular, los paneles están formados por un panel rígido ranurado, donde sobre cada ranura se sitúa una serie de resonadores de Helmholtz, como muestra la Fig. 1, pudiendo los resonadores ser diferentes.

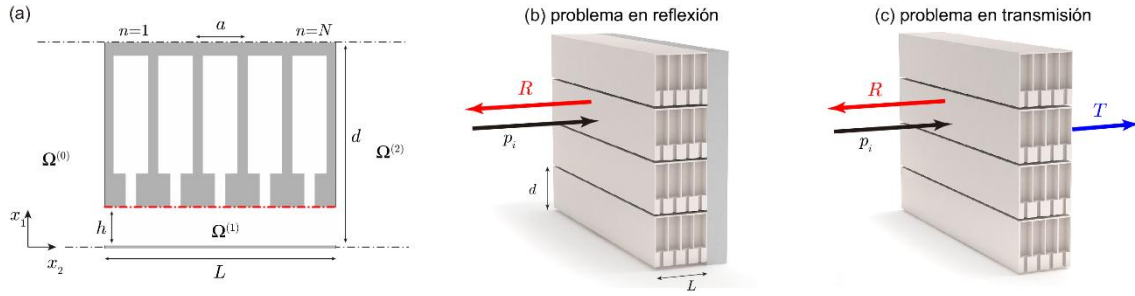


Fig. 1 (a) Geometría del metamaterial. (b) Esquema del problema en reflexión y en (c) transmisión.

2. MÉTODOS

El problema se ha resuelto analíticamente mediante el método de la matriz de transferencia, una expansión modal (MEM) y sus correspondientes parámetros efectivos, numéricamente mediante el método de los elementos finitos (FEM), y validado experimentalmente.

2.1. La matriz de scattering y absorción perfecta

Para describir las propiedades de scattering de un sistema unidimensional dado, podemos definir la matriz de scattering que relaciona la amplitud de las ondas incidentes ($A = e^{-ikx}$ y $D = e^{ikx}$) y salientes ($B = e^{ikx}$ y $C = e^{-ikx}$) de la estructura como:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & R^+ \\ R^- & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} \quad (1)$$

donde T y R son los coeficientes de transmisión y reflexión y el superíndice indica la dirección de propagación.

Para que un sistema presente absorción perfecta, o lo que es análogo, ausencia de scattering, los valores propios de la matriz de scattering han de ser cero [7]. Ello se consigue cuando las pérdidas intrínsecas de la estructura compensan exactamente la radiación de la estructura. En estas condiciones se dice que la estructura está acoplada críticamente con el medio [7]. Los valores propios de la matriz de scattering vienen dados por $\lambda_{1,2} = T \pm \sqrt{R^+ R^-}$. Así, los ceros y polos de los valores propios de la matriz de scattering proporcionan una abundante información para interpretar el sistema y encontrar las condiciones para la absorción perfecta, permitiendo el diseño del material, como veremos posteriormente.

2.2. Método de la matriz de transferencia (TMM)

Asumiendo que la altura de las ranuras es mucho más pequeña que la longitud de onda, podemos considerar que en el interior de cada ranura sólo se propagan ondas planas. Así, podemos relacionar la presión y velocidad de partícula (p , v_x) al inicio ($x=0$) y final ($x=L$) del material mediante la matriz de transferencia como:

$$\begin{bmatrix} p \\ v_x \end{bmatrix}_{x=0} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} p \\ v_x \end{bmatrix}_{x=L} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ v_x \end{bmatrix}_{x=L}, \quad (2)$$

dónde \mathbf{T} es la matriz de transferencia total que viene dada por el productorio de las diferentes matrices de transferencia \mathbf{M} que componen el material como

$$\mathbf{T} = \mathbf{M}_{\Delta_{\text{sit}}}^{[1]} \prod_{n=1}^N \mathbf{M}_{\text{s}}^{[n]} \mathbf{M}_{\text{HR}}^{[n]} \mathbf{M}_{\text{s}}^{[n]} \mathbf{M}_{\Delta_{\text{sit}}}^{[n+1]}, \quad (3)$$

dónde $\mathbf{M}_s^{[n]}$ es la matriz de transferencia del n -ésimo medio segmento de la ranura, $\mathbf{M}_{HR}^{[n]}$ es la matriz de transferencia del n -ésimo resonador, y $\mathbf{M}_{\Delta_{sit}}^{[1]}$ es la matriz de transferencia de la corrección por radiación debido a los posibles cambios en la sección para elementos intermedios o al acoplo con el medio exterior en el caso de los elementos iniciales y finales. Las diferentes matrices de transferencia para este material se pueden encontrar en [17]. Es importante señalar que las pérdidas termo-viscosas son tenidas en cuenta asumiendo una densidad y compresibilidad efectivas del aire, complejas y dependientes de la frecuencia, que dependen de la sección y geometría de cada elemento que compone el metamaterial [15]. En este caso se han empleado tubos de sección cuadrada [17].

La relación entre la matriz de scattering y la matriz de transferencia viene dada por:

$$T = \frac{2e^{ikL}}{T_{11} + T_{12} / Z_0 + Z_0 T_{21} + T_{22}}, R^- = \frac{T_{11} + T_{12} / Z_0 - Z_0 T_{21} - T_{22}}{T_{11} + T_{12} / Z_0 + Z_0 T_{21} + T_{22}}, R^+ = \frac{-T_{11} + T_{12} / Z_0 - Z_0 T_{21} + T_{22}}{T_{11} + T_{12} / Z_0 + Z_0 T_{21} + T_{22}}, \quad (4)$$

donde Z_0 es la impedancia característica del medio adyacente a la estructura, normalmente aire. Por último, la absorción es calculada como $\alpha = 1 - |R^-|^2 - |T|^2$.

2.3. Expansión modal y parámetros efectivos (MEM)

Cuando los resonadores son idénticos, es posible realizar una expansión modal [9,14] del sistema considerando el efecto de los resonadores como una modificación de la impedancia de la pared de cada ranura (línea roja punteada en la Fig. 1). Ello nos proporciona los parámetros efectivos del sistema, que son válidos para frecuencias inferiores a la resonancia de los resonadores [14] y sistemas en los que los resonadores son idénticos.

2.4. Método de los elementos finitos (FEM)

Para validar los métodos analíticos, se ha obtenido la solución numérica del problema mediante FEM teniendo en cuenta las pérdidas termo-viscosas en el aire asumiendo sus parámetros efectivos [15]. Para ello se ha empleado el software COMSOL Multiphysics 5.2 con una geometría 3D, dónde el mallado se ha refinado para asegurar 5 elementos por cada conducto del metamaterial (>50 elementos por longitud de onda).

2.5. Test experimental y diseño de las estructuras

Para demostrar la validez de los métodos, se han realizado test experimentales de medida de coeficiente de reflexión y transmisión en un tubo de impedancia de 15 x 15 cm. Las estructuras fueron fabricadas mediante técnicas de impresión 3D mediante estéreo-litografía empleando un epoxy translúcido fotoresistivo (Accura 60). Debido a que la impedancia característica del epoxy sólido es 5000 veces mayor que el aire, asumimos que el acoplo vibro-acústico en las paredes del metamaterial es despreciable.

3. RELACIÓN DE DISPERSIÓN EN EL METAMATERIAL: PROPAGACIÓN LENTA

Suponiendo que el material es homogéneo con resonadores idénticos, podemos calcular las relaciones de dispersión en el interior del metamaterial. La Fig. 2 muestra como tras introducir los resonadores creamos una banda prohibida de propagación o *bandgap* para frecuencias superiores a la resonancia de los resonadores, ω_{HR} , donde la propagación en el material es evanescente debido a que la parte imaginaria del número de onda es no nula (zona gris en Fig. 2). Por otro lado, para frecuencias cercanas al bandgap se observa una propagación dispersiva: la velocidad de fase no es constante con la frecuencia.

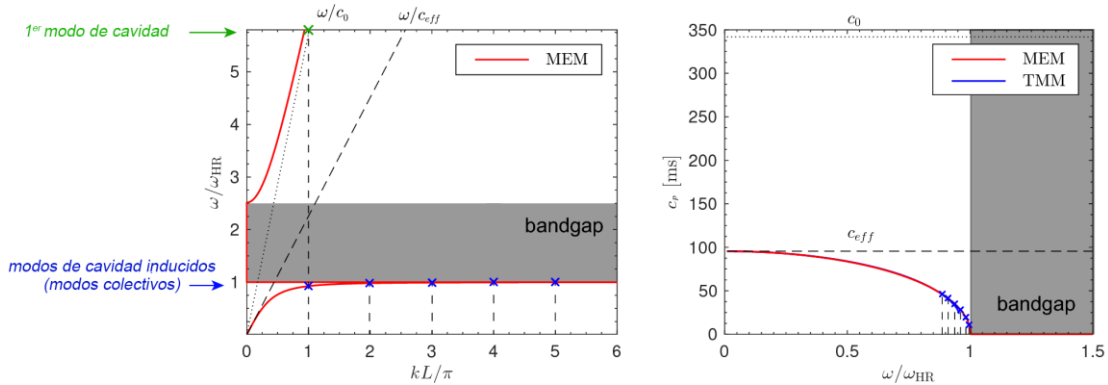


Fig. 2. (Izquierda) Relación de dispersión en el material, parte real del número de onda en función de la frecuencia. (derecha), velocidad de fase en el material.

Para frecuencias ligeramente inferiores a la resonancia, se produce una fuerte dispersión y la velocidad de fase es fuertemente reducida produciendo una propagación lenta (*slow-sound*). Por ello, se inducen modos de cavidad en el metamaterial a frecuencias bajas: la ranura se comporta como un resonador mucho más pequeño que la longitud de onda [10,14]. La reducción de la velocidad de propagación en el metamaterial nos permite reducir el grosor del panel y permitiendo el diseño de absorbentes con dimensiones más pequeñas que la longitud de onda.

4. PROBLEMA EN REFLEXIÓN

Para el problema en reflexión, en el que suponemos una pared rígida detrás de material, la matriz de scattering, Eq. (1), presenta un único valor propio, que resulta ser el valor absoluto del coeficiente de reflexión, $\lambda_{1,2} = \lambda = |R|$, puesto que $T = 0$, y $R^+ = R^-$. Por ello, en esta configuración el problema de obtener absorción perfecta se reduce, como es bien conocido, a conseguir un acoplo de impedancia. Así, mediante la optimización de la geometría podemos, simultáneamente, inducir una propagación lenta en las ranuras, a la vez que logramos el acoplo crítico de la estructura con el medio exterior. La Fig. 3 (a) muestra el diseño conceptual del panel para lograr absorción perfecta a una frecuencia, por lo que es suficiente emplear un solo resonador en cada ranura. La Fig. 3 (b) muestra el prototipo construido mediante impresión 3D. La frecuencia de resonancia del resonador es de 370 Hz, y la velocidad de fase en las ranuras se reduce fuertemente respecto de la velocidad del sonido en el aire, Fig. 3 (c). Se observa absorción perfecta a 338.5 Hz, correspondiente al modo de cavidad del material. Para demostrar que la absorción es perfecta, el valor propio de la matriz de scattering, es decir, $|R|$, es representado en el plano complejo de frecuencias, Fig. 3 (e). Para lograr absorción perfecta, el coeficiente de reflexión ha de ser cero. Podemos observar que al variar los parámetros geométricos el cero cruza el eje real de frecuencias, por lo que aseguramos que se produce absorción perfecta en esta configuración. Por último, mostramos la dependencia de la absorción con el ángulo de incidencia. Puesto que el material es localmente reactante se observa absorción *quasi*-perfecta para ángulos de incidencia menores que 60° , y el coeficiente de absorción en campo difuso es 0.93.

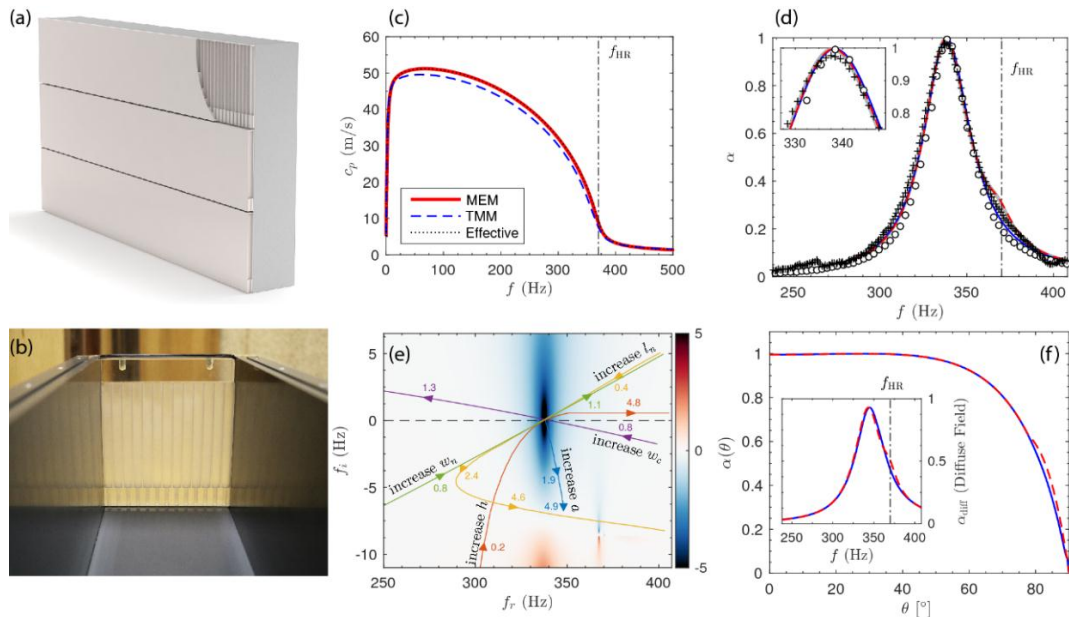


Fig. 3. (a) Diseño conceptual del panel, (b) fotografía del prototipo en el tubo de impedancia, (c) velocidad de fase en el interior del material, (d) Absorción medida experimentalmente (cruces), FEM (círculos), TMM (azul), MEM (rojo) y parámetros efectivos (gris). (e) Representación del coeficiente de reflexión en el plano de frecuencia compleja y trayectoria del cero al variar los parámetros geométricos, (f) absorción en función del ángulo de incidencia, absorción en campo difuso.

5. PROBLEMA EN TRANSMISIÓN

El problema en transmisión es más complejo puesto que la matriz de scattering presenta dos valores propios diferentes $\lambda_{1,2} = T \pm \sqrt{R^+ R^-}$. Para lograr absorción perfecta, ambos valores propios han de ser cero. Usando resonadores de Helmholtz idénticos, nuestro grupo demostró que absorción perfecta no puede ser posible [14]. Aquí, empleamos un sistema asimétrico con resonadores diferentes para lograr el acoplo crítico de la estructura y obtener absorción perfecta.

5.1. Absorbente perfecto monocromático

En primer lugar, presentamos la configuración básica para acoplar críticamente la estructura con el medio exterior a una frecuencia. La Fig. 4 (a) muestra un esquema del metamaterial con dos resonadores ligeramente diferentes. Puesto que la estructura es asimétrica, la propagación depende de la dirección de propagación. En el sentido indicado en la figura, el resonador de más baja frecuencia de resonancia (f_1) se encuentra en el fondo de la estructura. Puesto que dicho resonador introduce un mínimo en la transmisión para frecuencias superiores a su resonancia por medio de la introducción de un bandgap (ver sección 3), para frecuencias ligeramente superiores a f_1 las ondas son reflejadas por ese resonador. Ello se aproxima a una condición de contorno rígida para dicho rango de frecuencias. Entonces, un segundo resonador se coloca con una frecuencia de resonancia ligeramente superior, f_2 . Al igual que se realizó en el problema en reflexión, este resonador permite por un lado acoplar en impedancia el material y por otro producir propagación lenta en la ranura, por lo que el espesor del material puede ser mucho menor que la longitud de onda en aire.

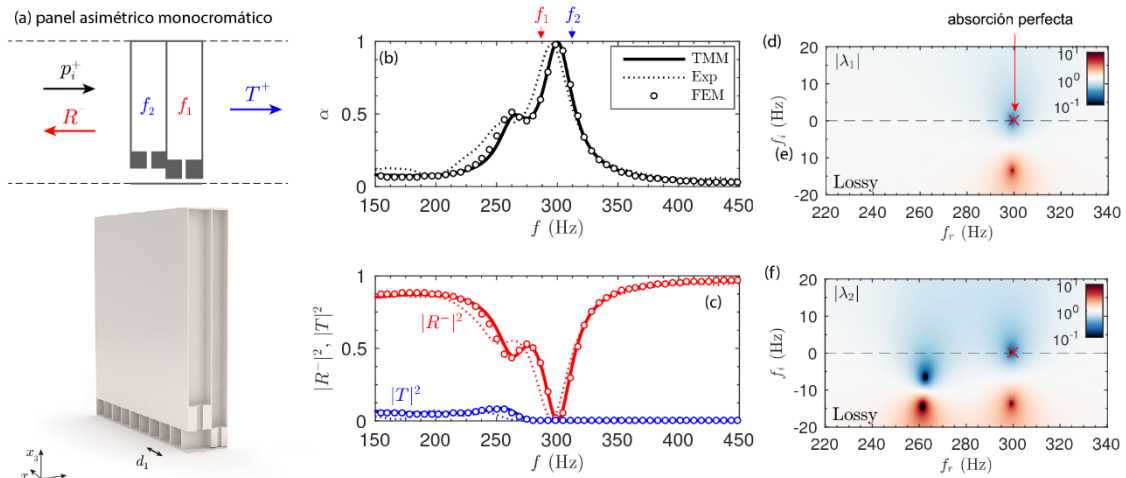


Fig. 4. (a) Esquema del metamaterial y diseño conceptual. (b) Absorción y (c) reflexión y transmisión de la estructura. Las frecuencias de resonancia de los resonadores están marcadas con las flechas. (d-f) valores propios de la matriz de scattering.

La Fig. 4 (b,c) muestra la absorción perfecta obtenida de manera analítica, numérica y experimental, con un perfecto acuerdo entre los métodos analíticos y numérico, y un excelente acuerdo entre ambos y los resultados experimentales. En particular, tras emplear algoritmos de optimización numérica (*sequential quadratic programming* [16]), se obtuvo una estructura con un espesor 40 veces más pequeño que la longitud de onda, donde la frecuencia absorbida fue 300 Hz y el espesor del panel 2.4 cm. Es importante señalar que la estructura permite el paso del flujo de aire por las ranuras. Por último, para demostrar que la absorción es perfecta mostramos la representación de los valores propios de la matriz de scattering en el plano de frecuencia compleja. En la configuración obtenida existe un cero de ambos valores propios a la misma frecuencia situado sobre el eje real de frecuencias. Por ello, la estructura no presenta scattering y está acoplada críticamente con el medio adyacente: la absorción es perfecta.

5.2. Absorbente de gran ancho de banda: *Rainbow Trapping Absorber*

Las configuraciones anteriores demuestran absorción perfecta en metamateriales a una única frecuencia. Sin embargo, para aplicaciones de ingeniería acústica es más interesante obtener respuestas que cubran gran parte del espectro audible. Ello se puede conseguir añadiendo una serie de resonadores en cascada a la configuración anterior, como muestra la Fig. 5, cada uno con una frecuencia de resonancia ligeramente superior al anterior. Así, cada resonador reduce la transmisión para frecuencias superiores a su resonancia, y el siguiente resonador acopla en impedancia la onda incidente a frecuencias ligeramente inferiores. El hecho de que los resonadores externos sean los de frecuencia más alta permite generar un perfil en forma de cuña lo que facilita el acoplo de impedancia de toda la estructura. Así, la absorción producida no solo cubre un gran ancho de banda, sino que además el rizado debido a las resonancias se reduce produciendo una banda de absorción plana de 300 a 1000 Hz con una estructura de 11 cm, es decir, un panel 10 veces más pequeño que la longitud de onda más larga absorbida. Los datos de absorción, Fig. 5 (b,c), obtenidos a partir del modelo analítico están en excelente concordancia con el modelo numérico, mientras que la concordancia con los datos experimentales es muy satisfactoria. Por otro lado, las Fig. 5 (d,e) muestran los valores propios de la matriz de scattering en el plano de frecuencia compleja. Podemos ver que los ceros de los valores propios se localizan sobre el eje real, por lo que la absorción producida a esas frecuencias es perfecta: la estructura está acoplada críticamente con el medio exterior.

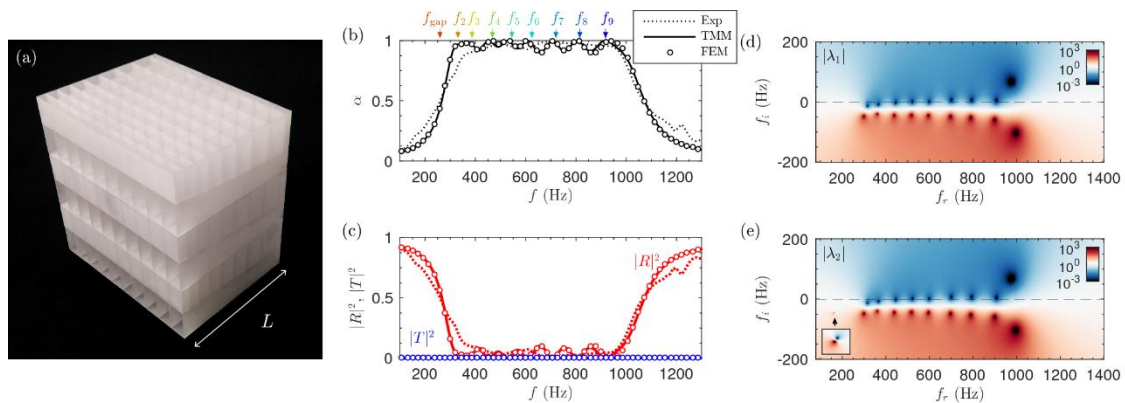


Fig. 5. (a) Fotografía de la estructura impresa en 3D. Las frecuencias de resonancia aparecen marcadas en la parte superior. (b) absorción y (c) reflexión y transmisión. (d,e) valores propios de la matriz de scattering en el plano de frecuencia complejo, en escala logarítmica.

Por último, y a modo de ilustración, mostramos en la Fig. 6 el campo en el interior de la estructura obtenido con simulación numérica incluyendo las pérdidas termoviscosas. Podemos observar que la energía se concentra para cada frecuencia en una zona del material, hecho característico de los materiales dispersivos en los que sus propiedades varían gradualmente con el espacio. Por esta razón denominamos este metamaterial como *rainbow trapping absorber*.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se han propuesto varios paneles absorbentes basados en metamateriales compuestos por resonadores de Helmholtz. Por un lado, la introducción de los resonadores introduce una fuerte dispersión en la propagación, introduciendo una propagación lenta del sonido en su interior. Ello permite reducir el espesor de los paneles hasta dimensiones mucho más pequeñas que la longitud de onda. Por otro lado, los modelos analíticos desarrollados permiten la modelización precisa de las pérdidas en el material, permitiendo ajustar la geometría de la estructura para lograr el acople crítico de la estructura con el medio exterior y obtener una absorción perfecta. En particular, se ha mostrado absorción perfecta para problemas en reflexión con un panel 88 veces más pequeño que la longitud de onda a 300 Hz, y para el problema en transmisión en 40 veces más pequeño que la longitud de onda para el caso monocromático y 10 veces más pequeño para una estructura que cubre un rango de aproximadamente dos octavas, desde 300 a 1000 Hz. El presente trabajo permite profundizar en los mecanismos físicos de absorción en estructuras resonantes y metamateriales, así como abrir puertas en el diseño de nuevos absorbentes acústicos estructurados de tamaño que tienen aplicación prácticas directas en el control de ruido de baja frecuencia.

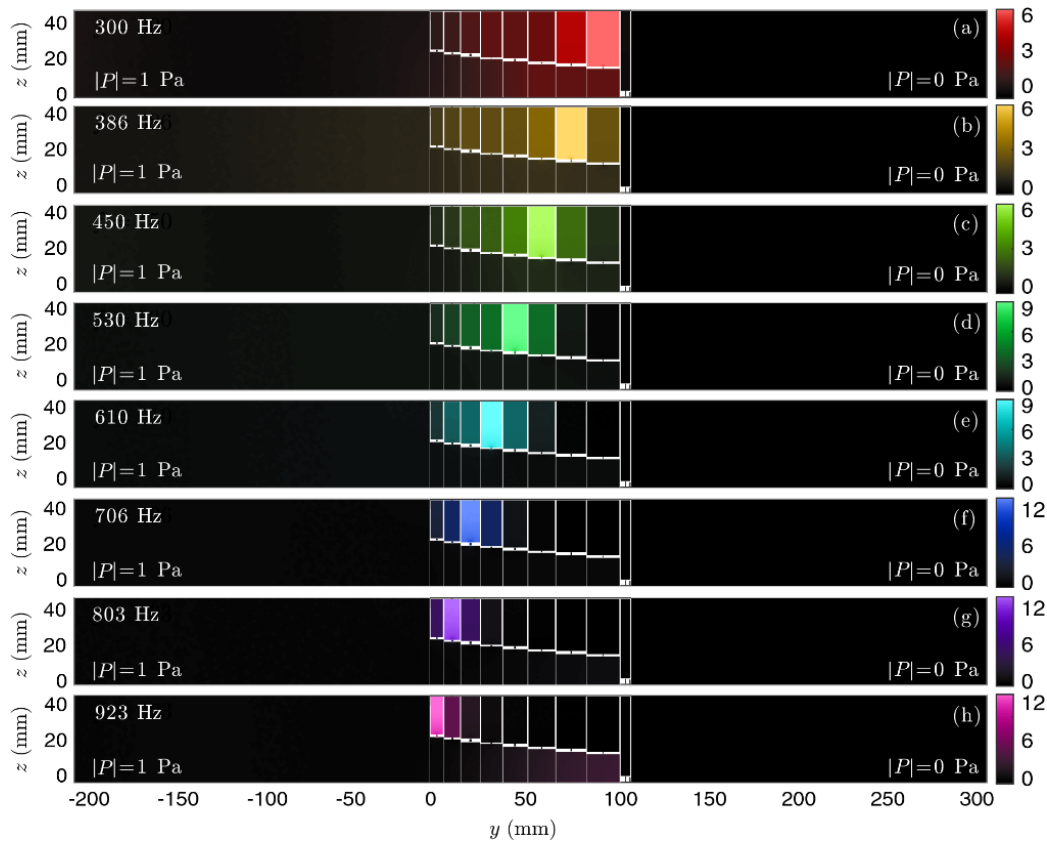


Fig. 6. (a-h) Campo acústico en el interior de la estructura, para frecuencias correspondientes a los picos de absorción perfecta de la estructura, mapa de color en escala logarítmica, $(20\log_{10} |p/p_0|)$ con $p_0 = 1$ Pa.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido subvencionado por el Proyecto Metaudible No. ANR-13-BS09-0003 por la ANR y FRAE.

REFERENCIAS

- [1] T. J. Cox and P. D'antonio, [Acoustic Absorbers and Diffusers: Theory, Design and Application \(CRC Press, 2009\)](#).
- [2] J.-P. Groby, A. Duclos, O. Dazel, L. Boeckx, and W. Lauriks, [J. Acoust. Soc. Am. 129, 3035 \(2011\)](#).
- [3] C. Lagarrigue, J. Groby, V. Tournat, O. Dazel, and O. Umnova, [J. Acoust. Soc. Am. 134, 4670 \(2013\)](#).
- [4] C. Boutin, [J. Acoust. Soc. Am. 134, 4717 \(2013\)](#).
- [5] Z. Yang, J. Mei, M. Yang, N. H. Chan, and P. Sheng, [Phys. Rev. Lett. 101, 204301 \(2008\)](#).
- [6] G. Ma, M. Yang, S. Xiao, Z. Yang, and P. Sheng, [Nat. Mater. 13, 873 \(2014\)](#).
- [7] V. Romero-García, G. Thecharis, O. Richoux, A. Merkel, V. Tournat, and V. Pagneux, [Sci. Rep. 6, 19519 \(2016\)](#)
- [8] J.-P. Groby, W. Huang, A. Lardeau, and Y. Auregan, [J. Appl. Phys. 117, 124903 \(2015\)](#).
- [9] J.-P. Groby, R. Pommier, and Y. Auregan, [J. Acoust. Soc. Am. 139, 1660 \(2016\)](#)
- [10] N. Jiménez, W. Huang, V. Romero-García, V. Pagneux, and J.-P. Groby, [Appl. Phys. Lett. 109, 121902 \(2016\)](#).
- [11] Y. Li and B. M. Assouar, [Appl. Phys. Lett. 108, 063502 \(2016\)](#)
- [12] M. Yang, C. Meng, C. Fu, Y. Li, Z. Yang, and P. Sheng, [Appl. Phys. Lett. 107, 104104 \(2015\)](#).
- [13] A. Merkel, G. Thecharis, O. Richoux, V. Romero-García, and V. Pagneux, [Appl. Phys. Lett. 107, 244102 \(2015\)](#).
- [14] N. Jiménez, V. Romero-García, V. Pagneux, J. Groby, [Phys. Rev. B, 95, pp 014205, \(2017\)](#)
- [15] M. R. Stinson, [J. Acoust. Soc. Am. 89, 550 \(1991\)](#)
- [16] M. J. Powell, [in Numerical Analysis \(Springer, New York, 1978\), pp. 144–157](#).
- [17] N. Jiménez, V. Romero-García, V. Pagneux, J.-P. Groby, *submitted draft*, [arXiv: 1708.03343](#)