

# MODELO EFICIENTE PARA O CÁLCULO DA PROPAGAÇÃO DE ONDAS ACÚSTICAS EM ÁGUAS POUCO PROFUNDAS UTILIZANDO O MÉTODO DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

E. G. A. Costa<sup>1</sup>, L. Godinho<sup>2</sup>, A. Pereira<sup>2</sup>, J. A. F. Santiago<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Programa de Engenharia Civil, COPPE – Universidade Federal do Rio de Janeiro,

CP 68506, CEP 21945-970, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

{[eduardo\\_costa@coc.ufrj](mailto:eduardo_costa@coc.ufrj) e [santiago@coc.ufrj](mailto:santiago@coc.ufrj)}

<sup>2</sup> CICC, Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Coimbra, 3030-788 Coimbra, Portugal.

{[lgodinho@dec.uc.pt](mailto:lgodinho@dec.uc.pt) e [apereira@dec.uc.pt](mailto:apereira@dec.uc.pt)}

## Resumo

Neste artigo se apresenta uma formulação numérica eficiente, no domínio da frequência, que permite determinar a propagação de ondas acústicas em águas pouco profundas. As geometrias bidimensionais analisadas são compostas por diferentes regiões com geometrias distintas. O Método das Soluções Fundamentais (MFS) é utilizado para modelar a propagação de ondas nestas regiões, sendo desenvolvida uma formulação que requer apenas a consideração de interfaces verticais entre as sub-regiões com geometrias diferentes. As funções de Green usadas neste trabalho são obtidas a partir de diferentes técnicas, tais como: a expansão das autofunções que são utilizadas para obter a solução fundamental para a região com fundo rígido horizontal e superfície livre e na região referente ao fundo rígido inclinado, a função é obtida através de um somatório de modos normais desacoplados. Os resultados obtidos são comparados com outros métodos numéricos designadamente o método dos elementos de contorno e o método dos modos normais acoplados (coupled normal modes). A aplicabilidade do modelo é ainda demonstrada através do cálculo de respostas no domínio da frequência para diferentes dimensões da região do fundo inclinado.

**Palavras-chave:** Método das Soluções Fundamentais, Funções de Green, águas pouco profundas.

## Abstract

In this article, an efficient numerical frequency domain formulation is proposed to investigate the acoustic wave propagation in shallow water. Two-dimensional systems composed of different regions with different bottom slope are analyzed. The Method of Fundamental Solutions (MFS) is used to model wave propagation in these regions and only the vertical interfaces between regions of different configurations are discretized. The Green's functions used in this work are obtained from different techniques, such as: the eigenfunction expansions that take into account the presence of flat rigid bottom and free surface; through the sum of uncoupled normal modes in the region related to the sloping bottom. The results obtained are compared with the boundary element method and the coupled normal modes method. The applicability of the model is further demonstrated by calculating the frequency domain responses for different dimensions of the region with sloping bottom.

**Keywords:** Method of Fundamental Solutions, Green's Functions, shallow water.

## 1 Introdução

A descrição do campo sonoro gerado por uma fonte acústica em um oceano pode ser obtida através da equação da onda (domínio do tempo) ou da equação de Helmholtz (domínio da frequência). A complexidade dos problemas acústicos impossibilita geralmente a obtenção de uma solução analítica para as equações diferenciais parciais que governam os fenômenos físicos desses problemas, fazendo com que a única alternativa viável para analisar esses problemas seja a utilização de métodos numéricos.

O livro de Jensen et al. [1] discute com detalhe os diferentes métodos que foram investigados por pesquisadores ao longo dos anos.

De fato, muitos pesquisadores vêm analisando o campo de pressão em tais configurações usando diferentes estratégias. O método dos modos normais acoplados desenvolvido por Evans [2], que considera o canal subdividido em um número finito de colunas adjacentes, tem sido amplamente utilizado para estes problemas [3-4], através do código COUPLE [5]. Este modelo considera o acoplamento total entre os modos e é capaz de lidar com os efeitos de “backscattering”.

Muitos modelos também têm sido desenvolvidos com base nos métodos numéricos bem estabelecidos na literatura, tais como: o Método dos Elementos Finitos, o Método dos Elementos de Contorno e o Método das Diferenças Finitas. Uma visão geral dos métodos numéricos mais comuns utilizados em acústica subaquática pode ser encontrada no artigo de Buckingham [6]. Dentre os diversos métodos existentes, o Método dos Elementos de Contorno (Boundary Element Method - BEM) é recomendável para modelar domínios homogêneos infinitos, uma vez que a condição de campo infinito será automaticamente satisfeita e apenas os contornos internos precisam ser discretizados, reduzindo consideravelmente o tamanho do sistema de equações lineares. No entanto, a aplicação do BEM é restrita ao conhecimento prévio das soluções fundamentais e das integrais singulares. Apesar dessas dificuldades, o método foi aplicado com sucesso à problemas de ondas acústicas em águas rasas por Dawson e Fawcett [7].

Em 2000, Santiago e Wrobel [8] utilizaram a técnica de sub-região na formulação dos elementos de contorno para a análise de propagação da onda acústica 2-D em águas rasas com topografia irregular no fundo do mar. Godinho et al. [9] também analisaram a propagação de ondas acústicas utilizando uma formulação do BEM, gerado por uma fonte pontual em um canal de fluido 2-D com uma deformação rígida no fundo, cuja parte inferior foi modelada utilizando as condições de contorno de Neumann.

Nos últimos anos as técnicas sem malha têm despertado bastante interesse da comunidade científica, trabalhando em problemas de propagação de ondas acústicas. Estes métodos não exigem discretização explícita do domínio, são computacionalmente eficientes e habitualmente requerem uma formulação matemática simples [10-11]. Dentre essas técnicas numéricas o Método das Soluções Fundamentais (Method of Fundamental Solutions - MFS) parece ser muito adequado quando problemas de propagação de ondas acústicas considerando geometrias regulares são analisados, superando mesmo o rigor do BEM [12].

Neste artigo será analisada a propagação de ondas acústicas em águas rasas usando uma formulação no domínio da frequência baseada no MFS. A configuração analisada combina as regiões de uma cunha e de um canal, onde o fundo é sempre considerado rígido e a superfície livre.

Aqui a técnica de sub-região e as soluções fundamentais [13-15] são empregadas para tornar possível usar apenas um número limitado de interfaces virtuais. As vantagens do modelo proposto, tais como a sua estabilidade, a precisão e um custo computacional mais baixo, são ilustrados através da realização de comparações com outros métodos bem estabelecidos na literatura, tais como: o método dos modos normais acoplados (“coupled normal modes”) e o BEM.

## 2 Formulação do Método das Soluções Fundamentais

### 2.1 Definição da equação de Helmholtz

Considere o problema de propagação de ondas acústicas em águas pouco profundas 2-D, com um fundo que consiste de segmentos horizontais e inclinados e um domínio de propagação que pode ser descrito usando várias sub-regiões, como mostrado na Figura 1. Assume-se que o domínio é excitado por uma fonte linear que pode estar em qualquer uma das sub-regiões.

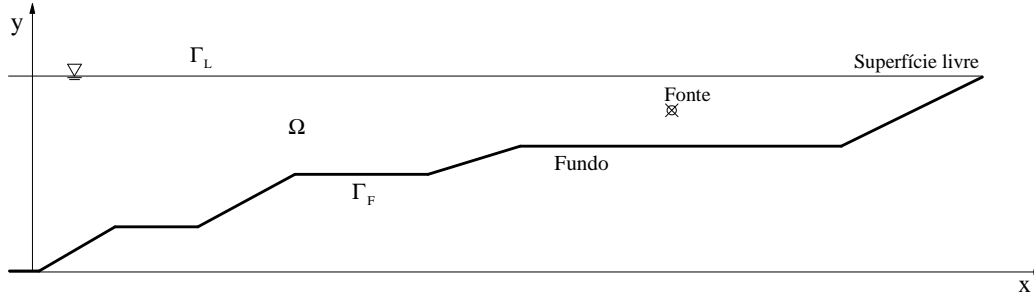


Figura 1 – Geometria do problema.

Sob tais condições, é possível considerar que a equação que governa este tipo de problema é conhecida, sendo habitualmente designada na literatura como equação de Helmholtz. Esta pode ser escrita como:

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}) + k^2 \phi(\mathbf{x}) = -Q \delta(\xi^f, \mathbf{x}), \quad \text{ numa região } \Omega \quad (1)$$

onde  $\phi(\mathbf{x})$  é o potencial de velocidade,  $Q$  é a magnitude da fonte concentrada em  $\xi^f$ ,  $\delta(\xi^f, \mathbf{x})$  é a função delta de Dirac e  $k = \omega/c$  é o número de onda, sendo  $\omega$  a frequência angular e  $c$  a velocidade do som na água.

As condições de contorno a seguir se aplicam ao problema acima: condição de Dirichlet,  $\phi(\mathbf{x}) = 0$ , sobre a superfície livre do contorno  $\Gamma_L$ ; condição de Neumann,  $\partial \phi(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{n} = 0$ , no contorno inferior  $\Gamma_F$ ; e a condição de radiação de Sommerfeld no infinito. Nestas expressões,  $\mathbf{n}$  é o vetor normal que aponta para fora do domínio e  $i = \sqrt{-1}$ . Sabe-se que, para o exemplo de um canal, a condição de radiação de Sommerfeld ( $\lim_{x \rightarrow \infty} [\partial \phi(\mathbf{x}) / \partial x - ik \phi(\mathbf{x})] = 0$ ) pode não ser suficiente para garantir que o problema seja bem representado (ver, por exemplo, Fix e Marin, [16], Buchanan et al. [17], Arens et al. [18]). Na verdade, quando uma solução fundamental  $G(\mathbf{x})$  pode ser escrita como um somatório de contribuições de modos normais  $G_m(\mathbf{x})$ , a condição de radiação de Sommerfeld deve ser satisfeita para cada modo  $m$ , e conseqüentemente a condição de radiação de Sommerfeld pode ser reescrita como  $\lim_{x \rightarrow \infty} [\partial G_m(\mathbf{x}) / \partial x - ik_{xm} G_m(\mathbf{x})] = 0$ , onde  $k_{xm}$  é o número de onda horizontal para o modo  $m$ .

### 2.2 Solução numérica do problema

Nesta formulação o domínio acústico será dividido em  $n$  sub-regiões  $\Omega_j$  (com  $j = 1, \dots, n$ , respectivamente), tal como ilustrado na Figura 2. Dentro de cada uma dessas sub-regiões, é possível definir funções de Green, tendo em conta as seguintes condições de contorno: (a) nas sub-regiões com um fundo inclinado, uma solução fundamental que satisfaz diretamente o fundo inclinado rígido e a

superfície livre é considerada, e (b) nas sub-regiões com um fundo horizontal, uma solução que satisfaz diretamente as condições do fundo rígido horizontal e da superfície livre do mar é empregada. O uso dessas funções requer apenas a definição de um conjunto de contornos fictícios verticais ( $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{n-1}$ ), conectando sub-regiões adjacentes, ao longo dos quais os pontos de colocação ( $PC_1, PC_2, \dots, PC_{n-1}$ ) serão localizados (ver Figura 2).

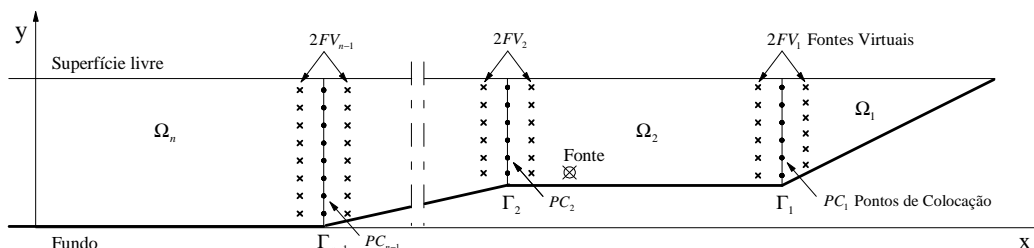


Figura 2 – Geometria do modelo MFS.

Dentro de cada sub-região, o MFS permite que a resposta seja obtida através de uma combinação linear de funções de Green, simulando o campo acústico dentro de cada sub-região por meio de um conjunto de fontes virtuais localizados fora de cada uma dessas sub-regiões, a uma distância fixa a partir das interfaces verticais que as dividem.

Considerando-se a sub-região  $\Omega_2$ , delimitada por  $\Gamma_1$  no seu lado direito e por  $\Gamma_2$  no seu lado esquerdo, dois conjuntos de  $FV_1$  e  $FV_2$  fontes virtuais, posicionadas fora da região, são usados para descrever o campo acústico dentro de cada sub-região, conforme ilustradas na Figura 2. Para cada sub-região, o potencial de velocidade num ponto interno  $\mathbf{x}_k$  pode então ser escrito como:

$$\phi(\mathbf{x}_k) = \sum_{l=1}^{FV_1} a_l^{\Omega_1} G_{kl}^{\Omega_1}(\xi_l^{\Omega_1}, \mathbf{x}_k) + (\vartheta \wedge 1) G_{kf}^{\Omega_1}(\xi^f, \mathbf{x}_k), \quad \text{região } \Omega_1 \quad (2a)$$

$$\phi(\mathbf{x}_k) = \sum_{l=1}^{FV_{j-1}+FV_j} a_l^{\Omega_j} G_{kl}^{\Omega_j}(\xi_l^{\Omega_j}, \mathbf{x}_k) + (\vartheta \wedge j) G_{kf}^{\Omega_j}(\xi^f, \mathbf{x}_k), \quad \text{região } \Omega_j (j = 2, \dots, n-1) \quad (2b)$$

$$\phi(\mathbf{x}_k) = \sum_{l=1}^{FV_{n-1}} a_l^{\Omega_n} G_{kl}^{\Omega_n}(\xi_l^{\Omega_n}, \mathbf{x}_k) + (\vartheta \wedge n) G_{kf}^{\Omega_n}(\xi^f, \mathbf{x}_k), \quad \text{região } \Omega_n \quad (2c)$$

onde  $\xi^f$  é a fonte real com coordenadas  $(x_f, y_f)$ ;  $\xi_l^{\Omega_j}$  refere-se à fonte virtual  $l$  colocada fora da sub-região  $\Omega_j$  ao longo de um contorno fictício (para evitar singularidades), e colocadas entre a superfície livre e o fundo rígido (quer seja no fundo inclinado ou horizontal), isto é, dentro do domínio onde a solução fundamental é válida;  $a_l^{\Omega_j}$  é a amplitude a ser determinada de cada uma das fontes virtuais de  $\Omega_j$ ;  $\vartheta$  é a sub-região em que a fonte real é posicionada e  $\wedge$  é o operador lógico “AND”, de modo que  $\vartheta \wedge j = 1$  se  $\vartheta = j$  e  $\vartheta \wedge j = 0$  se  $\vartheta \neq j$ ;  $G_{kf}^{\Omega_j}(\xi^f, \mathbf{x}_k)$  é o campo incidente relativo ao potencial de velocidade gerado pela fonte real quando colocado na sub-região  $\Omega_j$ ;  $G_{kl}^{\Omega_j}(\xi_l^{\Omega_j}, \mathbf{x}_k)$  refere-se a função de Green da sub-região  $\Omega_j$ . Detalhes sobre a formulação matemática dessas funções de Green serão abordados na próxima seção.

Derivando as expressões (2a), (2b) e (2c), a componente normal do potencial de velocidade em relação à interface entre as sub-regiões pode ser obtida. É importante notar que a direção normal é

sempre na direção horizontal ( $x$ ). Se for imposto, em cada ponto de colocação, a continuidade do potencial de velocidade e da derivada normal do potencial de velocidade, um sistema de equações  $2(PC_1 + PC_2 + \dots + PC_{n-1}) \times 2(FV_1 + FV_2 + \dots + FV_{n-1})$ , do tipo  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  será obtido.

Uma vez que este sistema de equações seja resolvido, o potencial de velocidade em qualquer ponto interno pode ser calculado através das expressões (2a), (2b) e (2c).

É importante notar que, para este problema, a matriz  $\mathbf{A}$  é quadrada, uma vez que o número de fontes virtuais é duas vezes o número dos pontos de colocação. Neste caso, o sistema de equação linear é resolvido por eliminação de Gauss, mas deve-se notar que, de acordo com trabalhos publicados (ver, por exemplo, Chen et al. [19], Tadeu et al. [20], ou Barnett et al. [21]), resultados imprecisos podem ser obtidos, sempre que a distância entre as fontes virtuais e a interface vertical for muito grande, devido ao mal-condicionado do sistema de equação. Uma análise mais detalhada da influência desta distância na precisão dos resultados será apresentada mais adiante.

### 3 Soluções fundamentais

#### 3.1 Solução analítica do canal com a superfície livre e o fundo rígido horizontal

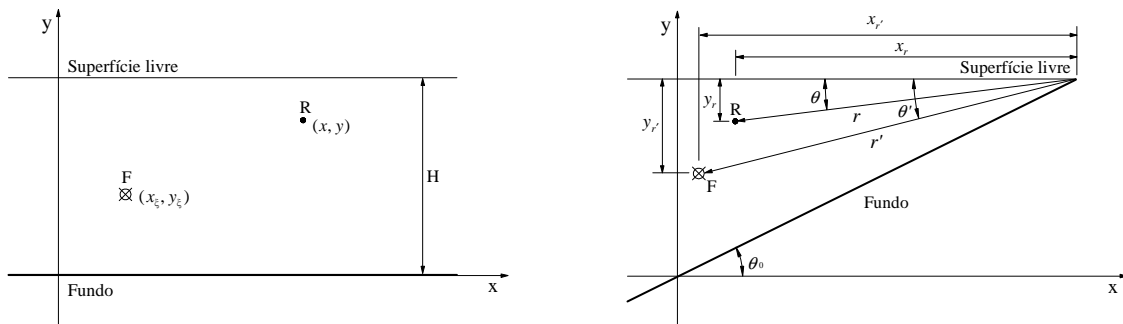
A solução analítica definida como  $G_M(\xi, \mathbf{x})$  e sua derivada normal em relação à interface vertical,  $\partial G_M(\xi, \mathbf{x})/\partial x$ , as quais satisfazem exatamente a condição de contorno referente à superfície livre e o fundo rígido horizontal do mar, conforme mostrado na Figura 3(a), em termos de modos normais podem ser escritas como [14]:

$$G_M(\xi, \mathbf{x}) = \frac{i}{H} \sum_{m=1}^{\infty} \sin[k_{ym}(Y_F - y_\xi)] \times \sin[k_{ym}(Y_F - y)] \frac{e^{ik_{xm}|x-x_\xi|}}{k_{xm}} \quad (3a)$$

$$\frac{\partial G_M(\xi, \mathbf{x})}{\partial x} = -\frac{1}{H} \operatorname{sgn}(x - x_\xi) \sum_{m=1}^{\infty} \sin[k_{ym}(Y_F - y_\xi)] \times \sin[k_{ym}(Y_F - y)] e^{ik_{xm}|x-x_\xi|} \quad (3b)$$

onde  $H$  é a profundidade do canal,  $Y_F$  é a coordenada  $y$  da superfície livre e os parâmetros

$k_{ym} = \left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{H}$  e  $k_{xm} = \sqrt{k^2 - k_{ym}^2}$  são os números de onda vertical e horizontal, respectivamente.



a)

b)

Figura 3 – Geometria de cada sub-região, onde as funções de Green são empregadas: a) configuração do canal com a superfície livre e o fundo rígido horizontal e b) configuração da cunha com a superfície livre e o fundo rígido inclinado.

### 3.2 Solução analítica de uma configuração em forma de cunha com a superfície livre e o fundo rígido inclinado

A solução analítica,  $G^{cunha}(\xi, \mathbf{x})$ , conforme mostrada na Figura 3(b), usada neste artigo, satisfaz exatamente a condição de contorno referente à superfície livre e o fundo rígido inclinado do mar. Essa solução e a sua derivada normal em relação à interface vertical,  $\partial G^{cunha}(\xi, \mathbf{x})/\partial x$ , são representadas pelas seguintes expressões [13, 15]:

$$G(\xi, \mathbf{x}) = \frac{i\pi}{\theta_0} \sum_{m=1}^{\infty} J_{\nu}(kr_{\zeta}) H_{\nu}^{(1)}(kr_{\zeta}) \times \sin(\nu\theta) \sin(\nu\theta') \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(\xi, \mathbf{x})}{\partial x} = & \frac{i\pi}{\theta_0} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ -\frac{\nu y_r}{r^2} J_{\nu}(kr) H_{\nu}^{(1)}(kr') \cos\left(\nu \arctan\left(\frac{y_r}{x_r}\right)\right) \sin(\nu\theta') + \right. \\ & \left. + \frac{kx_r}{2r} (J_{\nu-1}(kr) - J_{\nu+1}(kr)) H_{\nu}^{(1)}(kr') \sin(\nu\theta') \sin\left(\nu \arctan\left(\frac{y_r}{x_r}\right)\right) \right], \text{ if } r < r' \end{aligned} \quad (4b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(\xi, \mathbf{x})}{\partial x} = & \frac{i\pi}{\theta_0} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ -\frac{\nu y_r}{r^2} J_{\nu}(kr) H_{\nu}^{(1)}(kr') \cos\left(\nu \arctan\left(\frac{y_r}{x_r}\right)\right) \sin(\nu\theta') + \right. \\ & \left. + J_{\nu}(kr) \left( \frac{kx_r (H_{\nu-1}^{(1)}(kr') - H_{\nu+1}^{(1)}(kr'))}{2r'} \right) \times \sin(\nu\theta') \sin\left(\nu \arctan\left(\frac{y_r}{x_r}\right)\right) \right], \text{ if } r > r' \end{aligned}$$

onde  $\theta_0$  é o ângulo formado entre o fundo e a superfície livre,  $J_{\nu}$  é a função de Bessel do primeiro tipo e ordem  $\nu$ ,  $H_{\nu}^{(1)}$  é a função de Hankel do primeiro tipo e ordem  $\nu$ ;  $r_{\zeta} = \min(r, r')$ ,  $r_{\zeta} = \max(r, r')$ ,  $r = \sqrt{x_r^2 + y_r^2}$  e  $r' = \sqrt{x_{r'}^2 + y_{r'}^2}$  são as distâncias do receptor e da fonte ao vértice da cunha e  $\theta$  e  $\theta'$  são as profundidades angulares do receptor e da fonte. As ordens das funções de Bessel e Hankel são, para um fundo rígido, dadas por  $\nu = (m - \frac{1}{2})\pi/\theta_0$ .

## 4 Comportamento do modelo MFS

Para observar o comportamento do método para uma geometria mais elaborada, esta foi constituída por um canal contendo uma elevação perto da região próxima a linha da costa, conforme representada na Figura 4(a); essa elevação corresponde a uma colina íngreme de 10.00 m de altura definida por um segmento ascendente e outro descendente, cuja inclinação dos segmentos é de 11.3°. Já a região referente à cunha apresenta um ângulo de 18.4° e tem um comprimento horizontal de 60.00 m. A região do canal tem uma profundidade de 20.00 m. Esta geometria é definida pelo modelo MFS proposto através do estabelecimento de cinco sub-regiões ( $\Omega_1$  a  $\Omega_5$ ), como ilustrado na Figura 4(a).

O sistema consiste de uma fonte posicionada numa profundidade de 5.00 m e comprimento de 360.00 m a partir do vértice da cunha (Fonte 1 na Figura 4(a)), e as respostas são inicialmente calculadas em uma linha completa de receptores localizados a uma profundidade de 1.00 m, igualmente espaçados de 1.00 m. Simulações foram realizadas para as frequências de 100 Hz e 200 Hz, sendo os resultados mostrados nas Figura 4(b1) e Figura 4(c1), respectivamente. Um modelo BEM foi utilizado como solução de referência. A resposta exibe um comportamento oscilatório forte para ambas as

freqüências, devido às múltiplas interações que ocorrem dentro do canal. Curiosamente, para a freqüência mais baixa, as amplitudes menores são observadas imediatamente após a elevação, indicando que esta deformação do fundo (colina íngreme) faz com que a maior parte da energia seja reflectida de volta. A solução calculada usando o modelo MFS está também representada nestas figuras. Os resultados foram calculados usando um total de 21 (para 100 Hz) ou 42 (para 200 Hz) pontos de colocação, uniformemente distribuídos ao longo das quatro interfaces e considerando as fontes virtuais a uma distância fixa de 6.00 m de cada interface. Uma excelente proximidade entre os dois modelos (MFS e BEM) foi registrada.

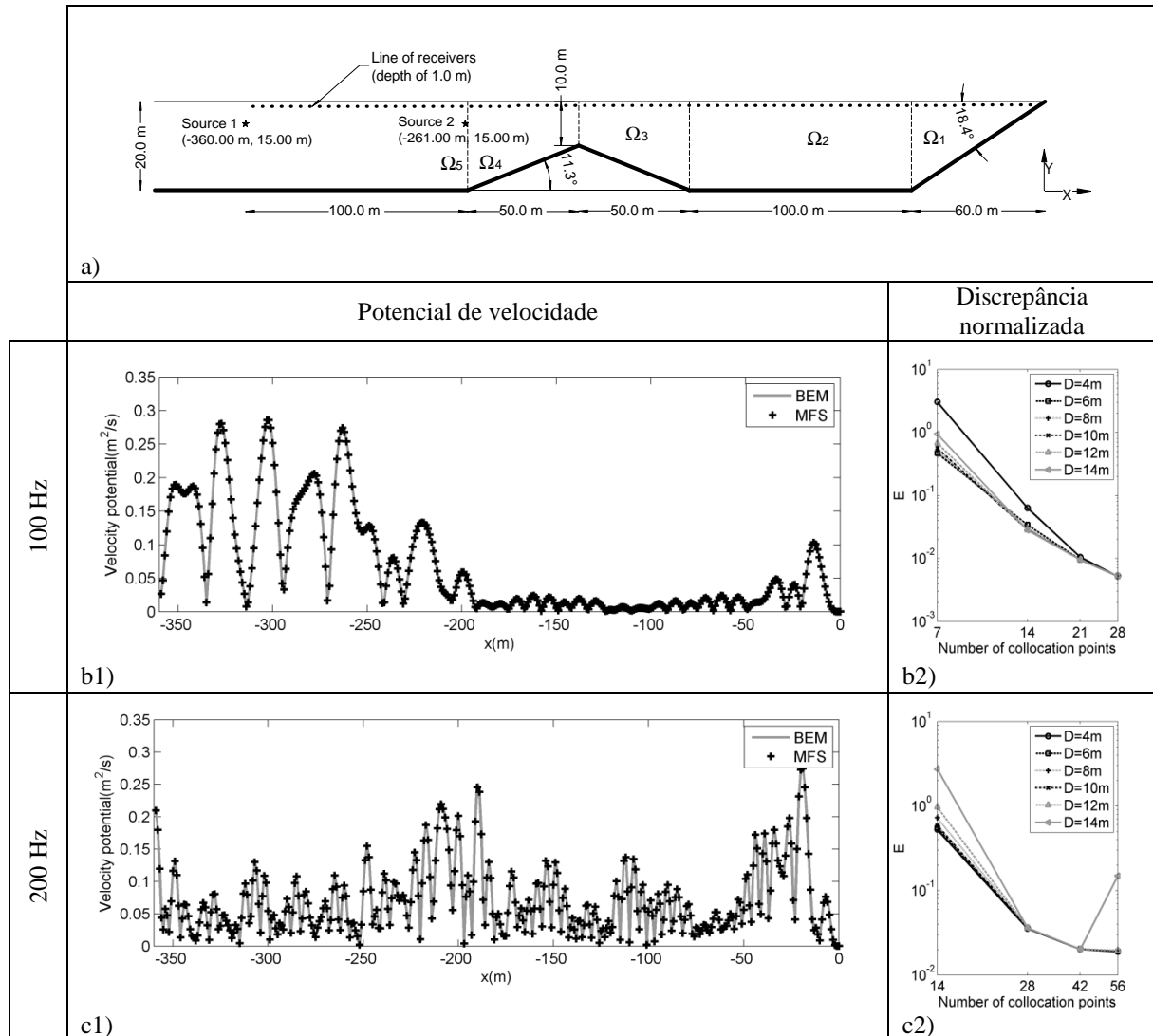


Figura 4 – Exemplo de verificação, que consiste de um canal com uma colina íngreme próxima à cunha: a) a geometria do problema; b) a resposta ao longo de uma linha horizontal de receptores para a freqüência de 100 Hz e c) a resposta ao longo de uma linha horizontal de receptores para freqüência de 200 Hz.

Para uma melhor compreensão do comportamento numérico do modelo proposto MFS, um estudo paramétrico foi também realizado para este teste, em que a resposta foi calculada para uma linha de receptores com diferentes distâncias entre as fontes virtuais e as interfaces, e para diferentes números de pontos de colocação (usando o mesmo número de pontos para cada interface). Uma

discrepância normalizada, definida como  $E = \frac{\sum_{i=1}^{nrec} |\phi_i^{MFS} - \phi_i^{BEM}|}{\sum_{i=1}^{nrec} |\phi_i^{BEM}|}$ , em relação à solução de referência BEM foi calculada. Os resultados destes cálculos são apresentados na Figura 4(b2) e Figura 4(c2). Os resultados destas figuras, calculados para 100 Hz e 200 Hz, respectivamente, mostram que a resposta do modelo MFS geralmente converge para a solução de referência (discrepância decrescente) à medida que o número de pontos de colocação aumenta, embora, para a frequência de 200 Hz, discrepâncias um pouco maiores tenham sido observadas. Essas discrepâncias maiores podem estar relacionadas com a complexidade do modelo, porém não se deve esquecer que a solução de referência foi também calculada numericamente.

Há, no entanto, uma exceção deste comportamento convergente para a frequência mais elevada, a qual ocorre com uma distância de 14.00 m, quando 56 pontos de colocação são utilizados. Para este caso, a resposta é pior do que a resposta calculada com 28 pontos de colocação, provavelmente devido ao mal-condicionamento do sistema de equações (ver, por exemplo, o trabalho de Chen et al. [19] para mais detalhes sobre este tipo de comportamento na formulação MFS).

## 5 Aplicação numérica

Uma aplicação numérica do modelo MFS conforme descrito anteriormente será agora apresentada, utilizando várias sub-regiões para calcular o campo 2-D de propagação de ondas acústicas gerada numa região próxima a linha da costa, cuja configuração genérica é apresentada na Figura 5.

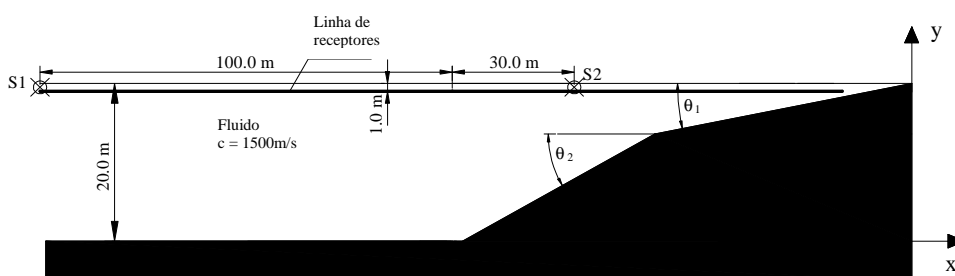


Figura 5 – Geometria para as simulações.

Será realizada uma comparação dos resultados calculados usando o método proposto com os obtidos através de código bem estabelecido na literatura. As características do domínio de propagação sugerem que a abordagem baseada no cálculo de modos normais pode ser adequada (usando o código COUPLE), que permite a simulação de sistemas genéricos usando os modos normais acoplados e representando tanto a propagação da onda completa (incluindo o efeito do “backscattering”) ou a propagação da onda apenas em uma direção. A Figura 6 ilustra as respostas do TL (Transmission Loss) calculados usando o código COUPLE (gráficos do lado esquerdo incluem os efeitos de “backscattering” e os gráficos do lado direito não consideram os efeitos de “backscattering”) e usando o modelo proposto, para  $\theta_1 = 11.3^\circ$  e  $\theta_2 = 3.25^\circ$ , na linha de receptores mostrada na Figura 5. Frequências de excitação para 100 Hz e 200 Hz foram analisadas para uma fonte posicionada em S1. Para o cálculo usando o COUPLE, e para assegurar os resultados convergentes e precisos, foram tomados certos cuidados especiais com a definição dos parâmetros de entrada: em primeiro lugar, para assegurar que o fundo exibe um comportamento rígido, velocidade de propagação e densidade muito elevada foram atribuídas a este meio ( $5 \times 10^6$  m/s e  $10^5$  g/cm<sup>3</sup>); no segundo, a espessura total do fundo rígido foi aumentada até que os resultados convergissem, indicando que o limite inferior



deixaria de influenciar nos resultados (uma espessura total de 200 foi usada); no terceiro, uma vez que o COUPLE define o fundo inclinado como uma série de segmentos, um grande número de segmentos foi utilizado para definir o fundo da geometria; e, finalmente, o número de modos utilizados no cálculo foi aumentado progressivamente até que a convergência da resposta fosse obtida (que ocorreu com 100 modos para 200 Hz e com 60 modos para 100 Hz).

Os gráficos da Figura 6(a1) e Figura 6(b1) mostram que as soluções calculadas com o COUPLE, considerando a propagação bidireccional das ondas, que correspondem às calculadas utilizando a técnica proposta do MFS, para ambas as frequências. É interessante notar que o COUPLE leva 10 vezes a mais do tempo computacional que a solução do MFS, o que significa que o modelo proposto pode ser muito eficiente para resolver este tipo de problema.

Na Figura 6(a2) e Figura 6(b2), a solução MFS foi comparada com a solução dos modos acoplados calculado usando o mesmo software (COUPLE), mas considerando propagação unidireccional. As respostas são muito diferentes, pois o efeito de “backscattering” não foi considerado. No entanto, é interessante notar que a resposta do COUPLE segue a mesma tendência da resposta do MFS, mas que não apresenta os picos pronunciados gerados pelas reflexões que ocorre dentro do modelo proposto, gerando um TL com curvas mais suaves.

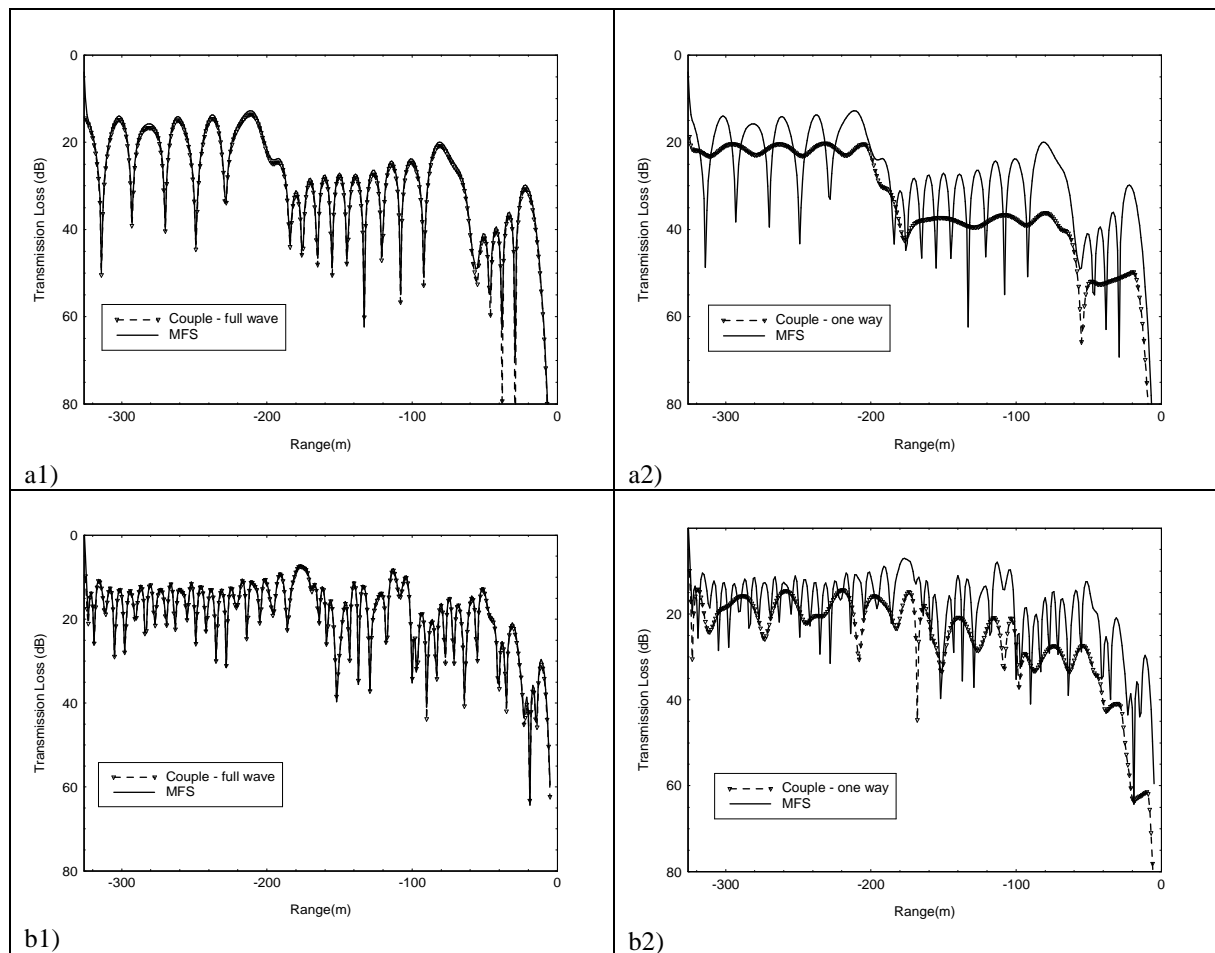


Figura 6 – Comparação dos resultados do TL usando o MFS e o COUPLE para uma região costeira com os ângulos  $\theta_1 = 11.3^\circ$  e  $\theta_2 = 3.25^\circ$  para as frequências de: a)  $f = 100\text{Hz}$  e b)  $f = 200\text{Hz}$ .

## 6 Conclusões

Uma formulação numérica, no domínio da frequência, com base no Método das Soluções Fundamentais, foi aplicada para estudar a propagação de ondas acústicas em uma região próxima a linha costeira confinada por uma superfície livre e por um fundo rígido consistindo de segmentos horizontais e inclinados. A formulação faz uso de funções de Green apropriadas, e, conseqüentemente, apenas as interfaces verticais entre as regiões em forma de cunha e de canal plano requerem uma interface virtual. Os testes numéricos consideraram que o atual modelo fornece resultados precisos. Os resultados analisados neste trabalho revelaram ainda uma boa convergência do método quando o número de pontos de colocação e de fontes virtuais aumenta e uma boa estabilidade da solução no que diz respeito à distância entre as fontes virtuais e a interface entre as sub-regiões. Os casos ilustrados, que correspondem às regiões costeiras com números variáveis de sub-regiões, mostraram que o método pode proporcionar bons resultados. Esta análise deixou claro que o MFS pode ser uma ferramenta interessante para analisar as respostas de forma eficiente no domínio da frequência para as configurações propostas.

### Agradecimentos

O primeiro autor gostaria de agradecer ao CNPq pelo apoio financeiro prestado a esta pesquisa.

### Referências

- [1] Jensen, F.B.; Kuperman, W.A.; Porter, M.B. *Computational Ocean Acoustics*, American Institute of Physics, Woodbury, New York, 2000.
- [2] Evans, R.B. A coupled mode solution for the acoustic propagation in a waveguide with stepwise depth variations of a penetrable bottom. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 74, 1983, pp. 188-195.
- [3] Jensen, F.B.; Ferla, C.M. Numerical solutions of range-dependent benchmark problems in ocean acoustics, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 87, 1990, pp. 1499-1510.
- [4] Athanassoulis, G.A.; Belibassakis, K.A.; Mitsoudis, D.A.; Kampanis, D.A.; Dougalis, V.A. Coupled mode and finite element approximations of underwater sound propagation problems in general stratified environment, *J. Comput. Acoust.*, Vol. 16, 2008, pp. 83-116.
- [5] Evans, R.B.; COUPLE: A user's manual, NORDA TN-332, 1986.
- [6] Buckingham, M.J. Ocean-acoustic propagating models, *J. Acoust.*, Vol. 3, 1992, pp. 223-287.
- [7] Dawson, T.W.; Fawcett, J.A. A boundary integral equation method for acoustic scattering in a waveguide with nonplanar surfaces, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 87, 1990, pp. 1110-1125.
- [8] Santiago, J.A.F.; Wrobel, L.C. A boundary element model for underwater acoustics in shallow water, *Comput. Model. Eng. Sci.*, Vol. 1, 2000, pp. 73-80.
- [9] Godinho, L.; Tadeu, A.; Branco, F. 3D acoustic scattering from an irregular fluid waveguide via the BEM, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol. 25, 2001, pp. 443-453.
- [10] Fairweather, G.; Karageorghis, A.; Martin, P.A. The method of fundamental solutions for scattering and radiation problems, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol. 27, 2003, pp. 789-769.
- [11] Cho, H.; Golberg, M.; Muleshkov, A.; Li, X. Trefftz methods for time dependent partial differential equations, *CMC Comput. Mater. Con.*, Vol. 1, 2004, pp. 1-38.

- [12] Godinho, L.; Tadeu, A.; Simões, N. Accuracy of the MFS and BEM on the analysis of acoustic wave propagation and heat conduction problems, in *Advances in Meshless Methods*, eds. J. Sladek, V. Sladek, Tech Science Press, 2006.
- [13] Stotts, S. Coupled-mode solutions in generalized ocean environments, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 111, 2002, pp. 1623-1643.
- [14] Pederson, T. Modeling shallow water acoustic wave propagation, MSc Thesis, University of Rhode Island, USA, 1996.
- [15] Buckingham, M.J.; Tolstoy, A. An analytical solution for benchmark problem 1: The ideal wedge, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 87, 1990, pp. 1511-1513.
- [16] Fix, G.; Marin, S. Variational methods for underwater acoustic problems, *J. Comput. Phys.*, Vol. 28, 1978, pp. 253-270.
- [17] Buchanan, J.; Gilbert, R.; Wirgin, A.; Xu, Y. *Marine Acoustics: Direct and Inverse Problems*, SIAM, Philadelphia, 2004.
- [18] Arens, T.; Gintides, D.; Lechleiter, A. Variational formulations for scattering in a three-dimensional acoustic waveguide, *Math. Methods Appl. Sci.*, Vol. 31, 2008, pp. 821-847.
- [19] Chen, C.S.; Cho, H.A.; Golberg, M.A. Some comments on the ill-conditioning of the method of fundamental solutions, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol. 30, 2006, pp. 405-410.
- [20] Tadeu, A.; António, J.; Godinho, L. Defining an accurate MFS solution for 2.5D acoustic and elastic wave propagation, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol. 33, 2009, pp. 1383-1395.
- [21] Barnett, A.H.; Betcke, T. Stability and convergence of the method of fundamental solutions for Helmholtz problems on analytic domains, *J. Comput. Phys.*, Vol. 227, 2008, pp. 7003-7026.