



Isolamento de Elementos Laminares aos Sons Aéreos e de Percussão Utilizando Funções de Green

A. Pereira^a, A. Tadeu^a, L. Godinho^a e J. António^a

^a *Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Coimbra, Pólo II Pinhal de Marrocos 3030-290 Coimbra, Portugal, apereira@dec.uc.pt*

RESUMO: O comportamento acústico de elementos horizontais infinitos, solicitados por fontes pontuais de ruído aéreo ou por cargas de impacto, é determinado utilizando uma formulação fundamentada no desenvolvimento de funções de Green. As respostas são calculadas no domínio da frequência, permitindo o cálculo imediato do valor do isolamento conferido pelo painel em estudo. Neste modelo, as perdas internas são introduzidas de forma simplificada utilizando velocidades de propagação complexas. A relação entre o isolamento aos sons aéreos e aos sons de percussão é analisada na tentativa de comparar estes resultados com soluções simplificadas. As principais conclusões são ilustradas através da modelação de elementos simples de betão e sistemas flutuantes que definem elementos construtivos constituídos por materiais e espessuras correntes. A redução sonora produzida pelo sistema flutuante quando se introduzem camadas de cortiça com diferentes espessuras é analisada.

ABSTRACT: The acoustic behavior provided by horizontal infinite elements, when excited by point loads placed either in the acoustic medium or impact loads is determined by making use of a Green functions formulation. The responses are calculated in the frequency domain allowing obtaining sound insulation curves without additional calculations. In this model the internal losses are introduced by using complex velocities. A relation between airborne and impact sound insulation is discussed by comparing the results with the achieved using simplified expressions. The main conclusions are illustrated for a single horizontal concrete element and a floating system similar to those applied in the recent construction practice. The sound reduction produced by the presence of the resilient layer when different thicknesses are employed is discussed.

1. INTRODUÇÃO

O estudo do isolamento aos sons aéreos e de percussão de divisórias de separação de dois espaços envolve a caracterização do comportamento acústico do elemento de separação e a previsão do isolamento conferido pela solução construtiva quando inserida numa estrutura.

A transmissão do som através de um elemento, depende de um conjunto de variáveis nomeadamente da frequência do som incidente, das propriedades do material constituinte (massa, módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson, factor de perdas internas do material), dos modos de vibração do elemento e do tipo de ligações à estrutura.

Neste artigo os autores utilizam modelos analíticos resultantes do desenvolvimento de Funções de Green, para determinar o comportamento acústico de elementos laminares horizontais e infinitos ao longo de duas direcções. O algoritmo é aplicado na determinação do isolamento aos sons aéreos e de impacto de elementos laminares horizontais simples e sistemas flutuantes. Este modelo foi já aplicado ao estudo do isolamento aos sons aéreos de painéis simples, duplos e multi-camada, tendo se verificado que conduz a resultados

satisfatórios. Neste trabalho as aplicações do método são estendidas ao caso do isolamento produzido por cargas de impacto. É efectuada uma análise 2.5 D (a geometria do modelo é bidimensional sendo as fontes consideradas pontuais) para determinar, no domínio da frequência, as curvas de isolamento aos sons aéreos e de impacto de modelos que se assemelham aos utilizados no edificado para separar espaços horizontalmente (lajes). Inicialmente é analisado o comportamento acústico de elementos simples de betão sendo as respostas comparadas com as obtidas através do método simplificado proposto por Heckl and Rathe [1]. Seguidamente é estudado o comportamento acústico de sistemas flutuantes semelhantes aos utilizados para reduzir o incómodo causado por ruídos de impacto. Neste último caso é analisada a importância da espessura da camada resiliente no isolamento. O artigo está organizado da seguinte forma: primeiro é apresentada a formulação do modelo analítico utilizado, seguem-se as aplicações efectuadas e a análise dos resultados; o artigo termina com as principais conclusões.

2. FORMULAÇÃO DO MODELO ANALÍTICO

2.1 Metodologia de Resolução do Problema Tridimensional

Considere-se um sistema multi-camada infinito ao longo das direcções x e z que divide um meio acústico infinito (ver Figura 1). Este sistema pode combinar diversas camadas com características elásticas ou acústicas com diferente espessuras h_i com $i=1,2,\dots,n$ identificando cada camada. As propriedades do meio elástico e acústico podem diferir: o meio acústico é caracterizado por uma densidade ρ_f^i e uma constante de Lamé λ_f^i , permitindo a propagação de ondas de pressão α_f^i ; o meio elástico com uma densidade ρ^i permite a propagação de ondas de compressão α^i e de corte β^i . O modelo descrito é solicitado por cargas pontuais que actuam no meio elástico na direcção vertical ou no meio acústico.

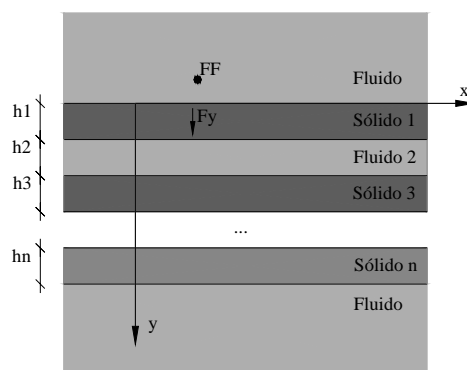


Figura 1 - Geometria do Problema.

No problema tridimensional descrito a geometria não varia segundo a direcção z , o que permite calcular o campo gerado por uma carga pontual, no domínio da frequência, através de um somatório dos campos bidimensionais gerados por cargas lineares com variação

sinusoidal ao longo da direcção z . Utilizando esta metodologia, cada campo bidimensional é caracterizado por diferentes números de onda axiais $k_{zm} = (2\pi/L_z)m$, sendo necessário considerar a existência de fontes virtuais igualmente espaçadas de L_z ao longo da direcção z . Refira-se que o caso particular em que k_z é igual a zero corresponde à situação em que a fonte é cilíndrica linear tornando-se o problema bidimensional puro.

Nestas condições o campo incidente, no domínio da frequência, para cada número de onda axial k_z é dado pelas expressões que se encontram na Tabela 1.

Tabela 1 - *Campo incidente.*

Carga no meio acústico (pressões)	Carga actuando no meio elástico na direcção y (Deslocamentos)
$p_{inc}^f = \frac{-i}{2} H_0(k_{\alpha_f} r)$	$G_{yy}^{inc} = A \left[k_s^2 H_{0\beta} - \frac{1}{r} B_1 + \gamma_y^2 B_2 \right]$
-	$G_{yx}^{inc} = \gamma_x \gamma_y A B_2$
-	$G_{yz}^{inc} = i k_z \gamma_y A B_1$

Nestas expressões os parâmetros referem-se a: $A = 1/(4i\rho\omega^2)$; $\gamma_i = \partial r / \partial x_i = x_i / r$ com $i = 1, 2$ correspondente aos cosenos directores; $B_n = k_\beta^n H_{n\beta} - k_\alpha^n H_{n\alpha}$; $H_{n\alpha_f} = H_n^{(2)}(k_{\alpha_f} r)$, $H_{n\alpha} = H_n^{(2)}(k_\alpha r)$ e $H_{n\beta} = H_n^{(2)}(k_\beta r)$ são as funções de Hankel de ordem n de segundo tipo; $k_{\alpha_f} = \sqrt{(\omega/\alpha_f)^2 - k_z^2}$; $k_\alpha = \sqrt{k_p^2 - k_z^2}$; $k_\beta = \sqrt{k_s^2 - k_z^2}$, $k_p = \omega/\alpha$; $k_s = \omega/\beta$; ω é a frequência de excitação e r é a distância da fonte ao receptor.

2.2 Metodologia de Resolução do Problema Bidimensional

As soluções que descrevem o campo de ondas bidimensional foram inicialmente deduzidas por Tadeu et al. [2] para o caso de um elemento laminar simples. Godinho [3] estendeu este modelo para o caso de um sistema multi-camada. Segundo estes autores, a resposta em cada meio é expressa através da soma do campo incidente em meio infinito com a contribuição do campo de ondas gerado por cada interface sólido/fluido. A técnica utilizada para definir as funções de Green baseia-se no conhecimento de potenciais de corte (ψ_{x0} , ψ_{z0}) para o meio sólido e dilatacionais para o meio sólido (ϕ_0) e fluido (ϕ_{fluido}), definidos para cada uma das interfaces a e b que delimitam a camada. Estes potenciais são escritos na forma de um somatório de respostas de ondas planas, com diferentes números de onda na direcção x , k_n , através da aplicação de uma transformada de Fourier ao longo da direcção x , sendo necessário considerar um número infinito de fontes planas distribuídas ao longo da direcção x em intervalos iguais a L_x .

A tabela 2 lista os potenciais utilizados para cada uma das cargas.

Os coeficientes A_n^y , B_n^y , C_n^y , D_n^y , E_n^y , F_n^y , G_n^y , e H_n^y das expressões apresentadas na Tabela 2 são incógnitas determinadas através da resolução do sistema de equações que resulta da

imposição das condições de fronteira nas interfaces. No caso da interface elástica - elástica define-se continuidade de deslocamentos e tensões segundo as três direcções. Na interface sólido - fluido é necessário verificar a continuidade de tensões e deslocamentos normais e tensões tangenciais nulas.

Foi ainda incorporado neste modelo o efeito das perdas internas do material através da consideração do módulo de elasticidade complexo e da constante de Lamé complexa.

Tabela 2 - *Potenciais utilizados.*

Carga de pressão no fluido ($\rho_f; \alpha_f; \lambda_f$)	Carga actuando no meio elástico na direcção y (Deslocamentos) ($\rho; \mu; \alpha; \beta$)
<i>Interface a</i>	
$\phi_{fluido}^a = -\frac{i}{L_x} \sum_{n=-N}^{n=+N} \left[\left(\frac{-\alpha_f^2}{\omega^2 \lambda_f} \right) \frac{E_{f0}^a}{v_n^f} D_n \right]$	$\phi_0^{y-a} = E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} (E_{b0}^a A_n^y) E_d$
-	$\psi_{x0}^{y-a} = E_a k_z \sum_{n=-N}^{n=+N} \left(\frac{-E_{c0}^a}{\gamma_n} C_n^y \right) E_d$
-	$\psi_{z0}^{y-a} = E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left(\frac{k_n}{\gamma_n} E_{c0}^a B_n^y \right) E_d$
<i>Interface b</i>	
$\phi_{fluido}^b = -\frac{i}{L_x} \sum_{n=-N}^{n=+N} \left[\left(\frac{-\alpha_f^2}{\omega^2 \lambda_f} \right) \frac{E_{f0}^b}{v_n^f} H_n \right]$	$\phi_0^{y-b} = -E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} (E_{b0}^b E_n^y) E_d$
-	$\psi_{x0}^{y-b} = E_a k_z \sum_{n=-N}^{n=+N} \left(\frac{-E_{c0}^b}{\gamma_n} G_n^y \right) E_d$
-	$\psi_{z0}^{y-b} = E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left(\frac{k_n}{\gamma_n} E_{c0}^b F_n^y \right) E_d$

Nas expressões listadas na Tabela 2 os coeficientes correspondem a:

$$\begin{aligned}
 E_{f0}^a &= e^{-i\nu_n^f |y|} & E_{f0}^b &= e^{-i\nu_n^f |y-h|} & \nu_n^f &= \sqrt{k_p^2 - k_z^2 - k_n^2} \text{ com } \text{Im}(\nu_n^f) \leq 0 \\
 E_{b0}^a &= e^{-i\nu_n^a |y|} & E_{b0}^b &= e^{-i\nu_n^b |y-h|} & E_{c0}^a &= e^{-i\gamma_n |y|} \\
 E_{c0}^b &= e^{-i\gamma_n |y-h|} & \gamma_n &= \sqrt{k_s^2 - k_z^2 - k_n^2} & \nu_n &= \sqrt{k_p^2 - k_z^2 - k_n^2} \\
 E_a &= \frac{1}{2\rho\omega^2 L_x} & E_d &= e^{-ik_n(x-x_0)} & k_n &= \frac{2\pi}{L_x} n .
 \end{aligned}$$

3. APLICAÇÕES

Neste trabalho estuda-se inicialmente o comportamento acústico de painéis simples quando solicitados por fontes de ruído aéreo e de impacto. Pretende-se aferir características de vibração associadas principalmente à propagação do som devido a cargas de impacto e averiguar a existência de uma relação entre o isolamento aos sons aéreos e de impacto. Compara-se esta relação com expressões simplificadas de forma a avaliar se o modelo analítico produz resultados satisfatórios. Seguidamente modela-se um sistema flutuante, analisando-se as suas características vibratórias e a redução sonora conferida por este sistema em relação a um elemento simples quando se faz variar a espessura da camada resiliente. No primeiro modelo (Modelo 1) estudado assume-se um elemento horizontal (laje estrutural) conforme esquematizado na Figura 2a com uma espessura que pode variar: $h_1 = 0.20$ m ou $h_1 = 0.15$ m .

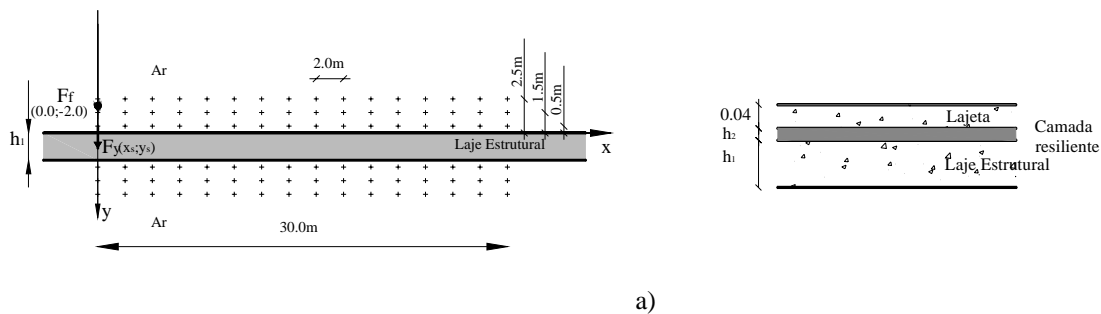


Figura 2 - Geometria das simulações: a) Modelo 1; b) Modelo 2.

No segundo modelo (Modelo 2), representado na Figura 2b, simulou-se um sistema flutuante constituído por uma laje estrutural com $h_1 = 0.15$ m onde assenta uma lajeta de betão com 0.04 m sobre uma camada resiliente com as propriedades da cortiça ($\alpha = 431.3$ m/s; $\beta = 282.9$ m/s; $\rho = 140.00$ kg/m³; $\eta = 0.15$). Fez-se variar a espessura da camada resiliente de acordo com $h_2 = 0.01$ m, $h_2 = 0.02$ m e $h_2 = 0.03$ m. As propriedades do betão utilizadas foram: $\alpha = 3498.6$ m/s; $\beta = 2245.0$ m/s; $\rho = 2500.0$ kg/m³ e $\eta = 4 \times 10^{-3}$. O meio acústico é o ar ($\rho_f = 1.22$ kg/m³ e $\alpha_f = 340.0$ m/s). Os modelos considerados são excitados por cargas pontuais actuando no meio acústico (F_f) na posição (0.0m; -2.0m) ou no meio elástico na direcção y (F_y) na posição $x_s = 0.0$ m e $y_s = 0.0$ m. O espectro de força utilizado para simular a carga de impacto foi um espectro unitário à excepção do caso em que se efectuam comparações com expressões simplificadas.

As respostas foram calculadas no domínio da frequência, para uma grelha de receptores igualmente espaçados de 2.0 m de acordo com a Figura 2a. A análise foi efectuada para uma gama de frequências de [2.0; 8192.0] Hz considerando um incremento de 2.0 Hz.

A Figura 3 apresenta as respostas obtidas no domínio da frequência para uma laje de betão simples com $h_1 = 0.20$ m. A Figura 3a ilustra o isolamento aos sons aéreos, obtido fazendo a diferença entre a média energética das pressões registadas na grelha de receptores posicionada nos espaços emissor e receptor. O nível sonoro médio registado no espaço receptor devido à carga de impacto está representado na Figura 3b.

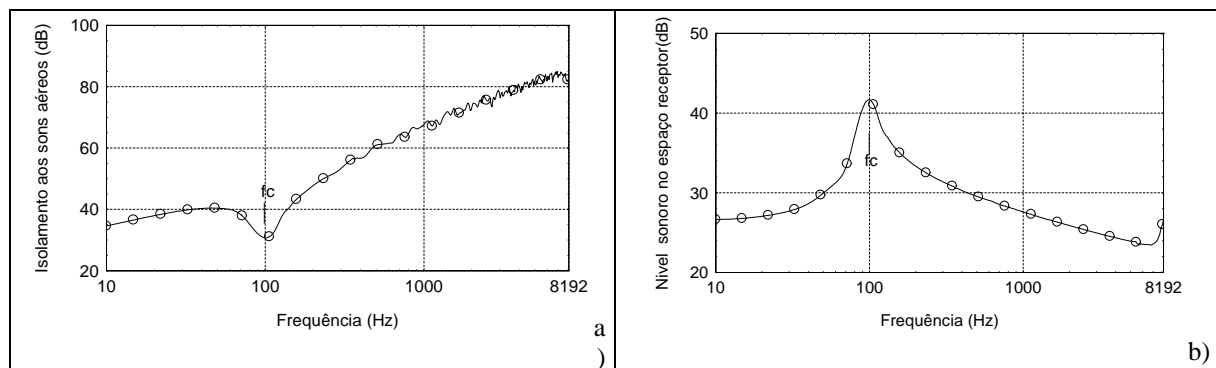


Figura 3 - Respostas obtidas para uma laje de betão com 20.0 m: a) Isolamento aos sons aéreos; b) Nível sonoro no espaço receptor devido a F_y .

Da análise da Figura 3a observa-se que a curva, correspondente ao isolamento aos sons aéreos aumenta como aumento da frequência. O efeito de coincidência associado às ondas de flexão da placa é visível (referenciado no gráfico por f_c). Nas altas frequências ocorrem quebras associadas às ressonâncias que se geram no interior do painel (este fenómeno forma-se no fim da resposta). Quando a carga de impacto actua na laje o nível sonoro no espaço receptor, diminui com o aumento da frequência. As características de vibração associadas ao efeito de coincidência e às ressonâncias no interior do painel são igualmente visíveis.

Na Figura 4a apresenta-se a curva que resulta da soma do isolamento aos sons aéreos (Figura 3a) e de impacto (Figura 3b). Da sua análise conclui-se que esta apresenta um comportamento próximo do linear. Desta forma foi efectuada a comparação das nossas respostas com a expressão simplificada proposta por Heckl e Rathe [1] que referem a seguinte relação entre o isolamento aos sons aéreos e de percussão:

$$L_n + R = 38 + 30 \log (f_m) \quad (dB), \quad (1)$$

em que f_m é a banda de frequência em 1/3 oitava (Hz); R a curva do isolamento aos sons aéreos e L_n é o isolamento aos sons de impacto devido à actuação de uma fonte de impacto normalizada. Segundo os autores esta curva apresenta bons resultados para frequências superiores à frequência crítica.

Para se efectuar a comparação entre as respostas resultantes do modelo analítico e as obtidas utilizando esta expressão, utilizou-se o espectro em frequência produzido pela máquina de percussão proposto por Cramer [4]. As respostas estão apresentadas na Figura 4b em bandas de frequência de terços de oitava. Os resultados mostram que as curvas apresentam um comportamento muito semelhante para frequências acima da frequência crítica. Conclui-se

assim que o modelo analítico produz bons resultados na previsão do isolamento aos ruídos de impacto para lajes homogêneas com impedância elevada.

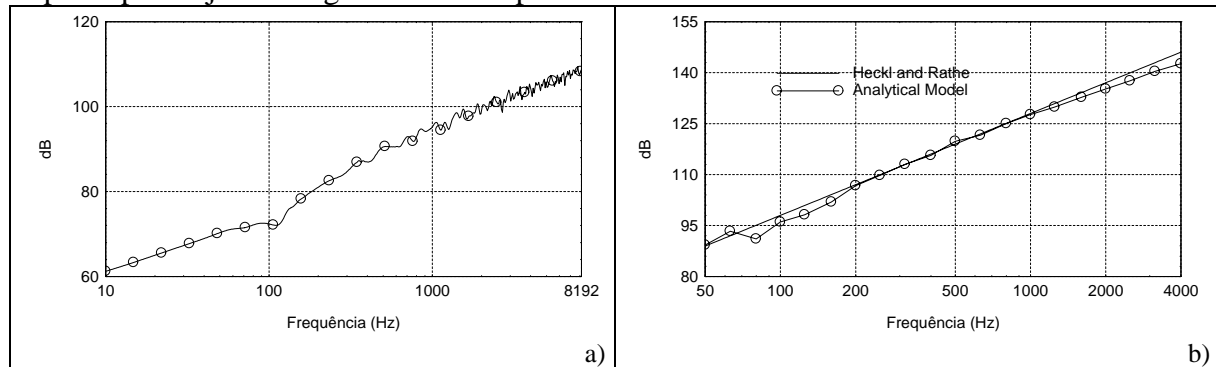


Figura 4 - Soma do isolamento aos sons aéreos e do nível sonoro no espaço receptor devido à carga de impacto. a) Curva em frequência; b) Curva em bandas de 1/3 oitava.

Seguidamente é analisado o comportamento acústico do Modelo 2 constituído por uma laje de betão de 0.15 m, onde assente uma lajeta de betão com uma espessura de 0.15 m sobre uma camada resiliente de cortiça.

Num sistema multi-camada diferentes fenómenos de vibração são gerados como o efeito de coincidência de cada um dos painéis, ressonâncias em cada uma das camadas e ressonância do sistema massa-mola-massa.

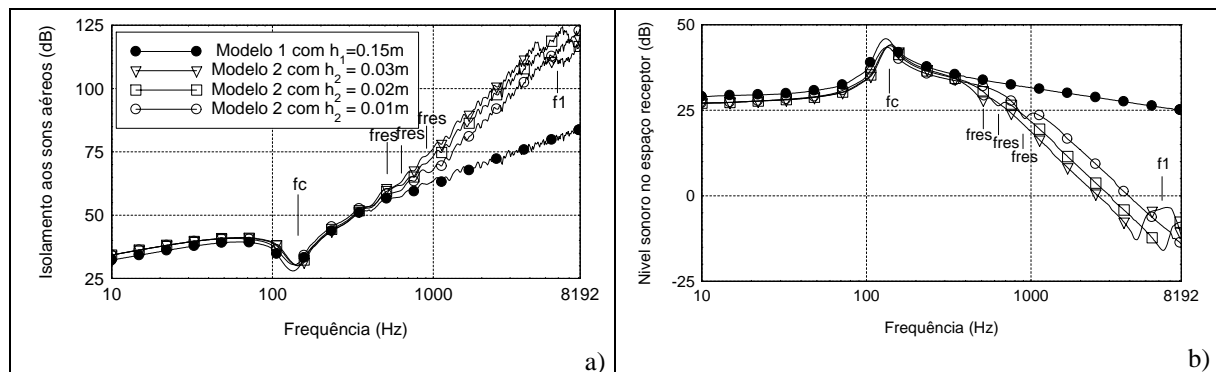
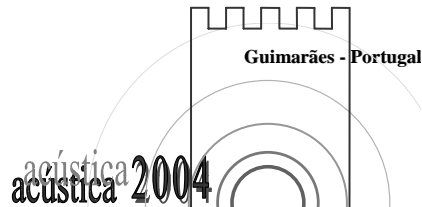


Figura 5 - Respostas obtidas considerando o Modelo 2: a) Isolamento aos sons aéreos; b) Nível sonoro no espaço receptor devido à carga F_y .

A análise dos resultados obtidos considerando o sistema flutuante, quer para o isolamento aos sons aéreos, quer para o isolamento aos sons de percussão, mostra a presença de uma quebra no isolamento (designada no gráfico por f_c) que está associada ao efeito de coincidência da laje de betão com 0.15m. O efeito de coincidência gerado na lajeta não aparenta influenciar a resposta. O efeito da ressonância do sistema massa-mola-massa (designação f_{res} nos gráficos) é bem visível. Recorde-se que a frequência de ressonância do sistema massa-mola-massa pode

ser calculada através da expressão $f_{res} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{K \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}$ em que $K = \frac{E}{h_2}$ é a rigidez da



camada resiliente em que E é o módulo de elasticidade; m_1 e m_2 as massas de superficiais de cada camada (Kg/m^2).

A comparação das respostas obtidas considerando este sistema flutuante com os resultantes da consideração de uma laje simples com $h_1 = 0.15$ m permite observar que nas baixas/médias frequências o comportamento de ambas as soluções é semelhante, no entanto à medida que a frequência aumenta o isolamento produzido pela solução com laje flutuante aumenta consideravelmente. Quando a espessura da camada resiliente aumenta o isolamento aumenta nas médias e altas frequências, no entanto as frequências de ressonância (marcadas no gráfico com a designação f1) que ocorrem no interior da camada resiliente, tornam-se importantes produzindo quebras no isolamento nas altas frequências.

Foi ainda efectuada a soma do isolamento aos sons aéreos e de percussão para todas as simulações apresentadas na Figura 5 (não apresentado). A análise destes resultados mostra que as curvas apresentam um comportamento muito semelhante.

5. CONCLUSÃO

Neste trabalho é analisado o comportamento acústico, quer aos sons aéreos quer aos ruídos de percussão, de dois modelos: o primeiro é constituído por um elemento laminar simples; o segundo considera um sistema flutuante. As simulações foram efectuadas utilizando um modelo analítico resultante do desenvolvimento de Funções de Green. A análise das curvas de isolamento dos modelos permitiu observar os fenómenos associados à transmissão do som. Foi ainda investigada uma relação entre o isolamento aos sons aéreos e de percussão tendo-se verificado que os resultados são semelhantes aos resultantes de expressões simplificadas propostas por outros autores.

REFERENCIAS

- [1] M.Heckle e J. Rathe; *Relationship between the Transmission Loss and the Impact Noise Isolation of Floor Structures*. The Journal of The Acoustical Society of America 35 (11), pp. 1825-1830, 1963.
- [2] A.Tadeu e J.António; *2.5D Green Functions for Elastodynamic Problems in Layered Acoustic and Elastic Formations*. Journal of Computer Modeling in Engineering and Sciences CMES, 2, pp. 477-495, 2002.
- [3] L.Godinho; *Propagação de Ondas em Sistemas que requerem o estudo da interacção sólido-fluido*. Tese de Doutoramento, Coimbra, 2003.
- [4] L. Cremer, M. Heckl e E. E. Ungar, *Structure-Borne Sound*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.