

ACOPLAMENTO ITERATIVO DE PROBLEMAS ACÚSTICO-POROELÁSTICOS

Kleber De Almeida Gonçalves^{1*}

Luis Manuel Godinho¹

Delfim Soares Jr²

Pedro Alves Costa³

¹ University of Coimbra, ISISE, ARISE, Department of Civil Engineering, Coimbra, Portugal

² Structural Engineering Department, Federal University of Juiz de Fora, Juiz de Fora, MG, Brazil.

³ Faculty of Engineering of the University of Porto, CONSTRUCT, Porto, Portugal

RESUMO

Este artigo apresenta uma estratégia numérica para analisar problemas acoplados acústico-poroelásticos em domínios finitos. Ele descreve uma formulação de acoplamento iterativo usando o Método dos Elementos Finitos (MEF). O procedimento iterativo adotado resolve cada subdomínio separadamente, atualizando as condições de contorno nas interfaces compartilhadas até a convergência. Um parâmetro de relaxação é incluído, e valores ótimos são calculados. Esta abordagem permite discretizações independentes, resultando em sistemas de equações menores e melhor condicionados. Resultados numéricos demonstram a eficácia da técnica de solução proposta.

ABSTRACT

This paper presents a numerical strategy for analyzing coupled acoustic-poroelastic problems in finite domains. It describes an iterative coupling formulation using the Finite Element Method (FEM). The adopted iterative procedure solves each subdomain separately, updating variables at shared interfaces until convergence. A relaxation parameter is included, and optimal values are derived. This approach allows for independent discretizations, leading to smaller and better-conditioned systems of equations. Numerical results demonstrate the effectiveness of the proposed solution technique.

Palavras Chave — *Método de Elementos Finitos, acoplamento iterativo, acústico, poroelástico*

1. INTRODUÇÃO

Conforme destacado por Zienkiewicz e Taylor [1], a análise de sistemas acoplados é uma questão crucial e pode ser categorizada sob dois principais enfoques: (i) sistemas em que o acoplamento ocorre nas interfaces dos domínios, através da imposição de condições de contorno, em que cada domínio descreve uma situação física ou um processo de discretização distinto; e (ii) sistemas em que o acoplamento é realizado através de domínios que se sobrepõem, por intermédio de equações diferenciais que governam fenômenos físicos diversos.

Neste estudo, focamos em um modelo altamente abrangente que lida com sistemas acoplados, nos quais os domínios sobrepostos (meio poroso [2]) são acoplados aos domínios adjacentes (acústico [3]) por meio de condições de interface. Essa abordagem permite a consideração de uma ampla gama de fenômenos físicos que interagem de maneira intrínseca no sistema analisado.

A importância de tal abordagem é evidente em várias disciplinas da engenharia, principalmente na geofísica, onde a capacidade de realizar análises abrangentes é essencial. Isso se torna particularmente relevante ao considerarmos a modelagem numérica de formações porosas, que frequentemente exibem comportamentos muito mais complexos do que materiais puramente elásticos. Essa complexidade é inerente à interação multifacetada entre os componentes sólidos e fluidos presentes nos sistemas em estudo.

A formulação poroelástica surge como uma ferramenta poderosa, permitindo a incorporação natural de propriedades físicas essenciais, como porosidade e permeabilidade de rochas, que não podem ser adequadamente consideradas em modelos estritamente elásticos. A teoria desenvolvida por Maurice A. Biot [4, 5], relacionada à propagação de ondas em meios poroelásticos saturados com fluido, desempenha um

* **Autor de contacto:** kleber.a.g@hotmail.com

Copyright: ©2023 First author et al. This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 3.0 Unported License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original author and source are credited.

papel fundamental. Essa teoria aplica os princípios da mecânica do contínuo para descrever o comportamento conjunto do esqueleto elástico e do fluido viscoso presentes nos poros, em uma escala macroscópica.

É importante enfatizar que a análise numérica de sistemas acoplados, como os modelos que interagem nos domínios acústico e porodinâmico, representa um desafio substancial. Isso se deve à necessidade de abordar adequadamente os subdomínios em que diferentes fenômenos físicos estão envolvidos e à complexidade da modelagem numérica da propagação de ondas através de interfaces com formas variadas e intrincadas.

Para lidar com essa complexidade, adotamos o método dos elementos finitos [6, 7, 2]. Essa abordagem é aplicada de forma abrangente na discretização dos subdomínios acústicos e porodinâmicos, permitindo uma representação precisa dos fenômenos físicos envolvidos.

Dessa forma, este trabalho visa aprofundar o entendimento e capacidade de análise de sistemas complexos e interativos, com foco em sistemas acoplados que abrangem componentes acústicos e porodinâmicos.

Essa abordagem de modelagem e análise de sistemas acoplados tem uma ampla gama de aplicações em situações reais de engenharia. Por exemplo, na análise de fundações para máquinas vibratórias, como as usadas em plantas industriais, a compreensão do acoplamento entre meios porosos e acústicos é essencial para evitar excessos de ruídos. Além disso, em projetos de barragens e diques que tem a ligação entre fluido e solo, a análise acústico-porodinâmica desempenha um papel fundamental na previsão de comportamentos complexos. Esses são apenas alguns exemplos de como essa abordagem de sistemas acoplados é aplicada com sucesso em situações reais de engenharia, demonstrando sua relevância e impacto prático.

2. EQUAÇÕES GOVERNANTES

Nesta seção, são brevemente apresentadas as equações fundamentais que governam os subdomínios acústico e poroelástico do modelo acoplado em foco, bem como suas relações de interface. Nas seções subsequentes, discutiremos o tratamento numérico desses modelos teóricos.

2.1. Meio Acústico

A equação da onda acústica, também conhecida como equação de Helmholtz, pode ser formulada da seguinte maneira, expressa com notação indicial [3]:

$$p(X, \omega)_{,ii} + \gamma^2 p(X, \omega) + s(X, \omega) = 0 \quad (2.1)$$

onde, $p(X, \omega)$ e $s(X, \omega)$ representam, respectivamente, a pressão hidrodinâmica e as distribuições de fontes no domínio. O termo γ é definido como o número complexo de onda, calculado como $\gamma = \sqrt{\omega^2/C^2}$, onde $C = \sqrt{k/\rho}$ é a velocidade de propagação da onda, ρ é a densidade e k descreve a compressibilidade do meio.

As condições de contorno para o problema acústico podem ser estabelecidas da seguinte forma:

$$p(X, \omega) = \bar{p}(X, \omega), \text{ para } X \in \Gamma_1 \quad (2.2)$$

$$q(X, \omega) = p_{,j}(X, \omega)n_j(X) = \bar{q}(X, \omega), \text{ para } X \in \Gamma_2 \quad (2.3)$$

onde, os valores prescritos são indicados por barras, e $q(X, \omega)$ representa o fluxo ao longo da fronteira, com suas componentes do vetor normal representadas por $n_j(X)$. A fronteira do modelo é descrita pela união de Γ_1 e Γ_2 , onde Γ_1 representa as partes essenciais (ou de Dirichlet) e Γ_2 as partes naturais (ou de Neumann) da fronteira, com $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

2.2. Meio Poroelástico

As equações governantes para um modelo poroelástico (formulação **u-p**) podem ser expressas como se segue [2]. A equação de equilíbrio de momento no meio acoplado é dada por:

$$\sigma_{ij}(X, \omega)_{,j} + \omega^2 \rho_m u_i(X, \omega) + b_i(X, \omega) = 0 \quad (2.4)$$

e a equação de equilíbrio de massa e momento para o fluido intersticial é representada por:

$$\begin{aligned} & -i\omega\alpha\varepsilon_{ii}(X, \omega) - (\kappa p_{,i}(X, \omega))_{,i} \\ & - i\omega(1/Q^*) p(X, \omega) \\ & + s(X, \omega) = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Na equação (2.4), $\sigma_{ij}(X, \omega)$ descreve as tensões totais do modelo, onde as tensões efetivas são definidas como $\sigma'_{ij}(X, \omega) = \sigma_{ij}(X, \omega) + \alpha \delta_{ij} p(X, \omega)$, sendo α o parâmetro de Biot, $p(X, \omega)$ a pressão do fluido intersticial nos poros, e δ_{ij} o delta de Kronecker. Além disso, $u_i(X, \omega)$ representa o deslocamento da matriz sólida, $b_i(X, \omega)$ descreve a força no domínio, e $\rho_m = \eta\rho_f + (1 - \eta)\rho_s$ representa a densidade de massa da mistura, onde ρ_s e ρ_f são as densidades de massa das fases sólida e fluida, respectivamente, e η representa a porosidade do meio.

A equação (2.5) considera o tensor de deformação $\varepsilon_{ij}(X, \omega)$, o coeficiente de permeabilidade κ definido de acordo com a lei de permeabilidade de Darcy, os termos de fonte do domínio $s(X, \omega)$, e o parâmetro de mistura Q^* , definido como $(1/Q^*) = \eta/K_f + (\alpha - \eta)/K_s$, onde os módulos de volume das fases sólida e fluida são representados por K_s e K_f , respectivamente.

As condições de contorno para o problema poroelástico podem ser estabelecidas considerando poro-pressões prescritas (Eq. 2.2) ou fluxos (Eq. 2.3), bem como deslocamentos prescritos (Eq. 2.6) ou trações totais (Eq. 2.7):

$$u_i(X, \omega) = \bar{u}_i(X, \omega), \text{ para } X \in \Gamma_1 \quad (2.6)$$

$$\tau_i(X, \omega) = \sigma_{ij}(X, \omega)n_j(X) = \bar{\tau}_i(X, \omega), \text{ para } X \in \Gamma_2 \quad (2.7)$$

2.3. Interfaces Comuns

No contexto do acoplamento entre um sólido poroelástico (denotado pelo sobrescrito “P”) e um fluido acústico (denotado pelo sobrescrito “A”) [9], quando se trata de uma

interface selada, o fluido acústico e o fluido poroso não estão hidraulicamente conectados. Portanto, a pressão do fluido sofre uma descontinuidade e não há fluxo de fluido através da interface. Como resultado, as condições de acoplamento assumem a seguinte forma:

$$\sigma_{ij}^P(X, \omega) n_j(X) = -p^A(X, \omega) n_i(X) \quad (2.8)$$

$$u_j^P(X, \omega) n_j(X) = \frac{1}{\rho \omega^2} p_j^A(X, \omega) n_j(X) \quad (2.9)$$

$$p_j^P(X, \omega) n_j(X) = 0 \quad (2.10)$$

A equação (2.8) descreve a transferência de tensão entre o sólido poroelástico e o fluido acústico. Aqui, $\sigma_{ij}^P(X, \omega)$ representa o estresse de Cauchy total experimentado pelo sólido poroelástico, enquanto $p^A(X, \omega)$ representa o campo de pressão acústica. Essa equação garante que o equilíbrio de tensão seja mantido através da interface, permitindo a transferência de tensão entre os dois meios.

A equação (2.9) relaciona o deslocamento normal do sólido poroelástico com o gradiente de pressão acústica. Aqui, $u_j^P(X, \omega) n_j(X)$ representa o deslocamento normal do sólido poroelástico na interface e $p_j^A(X, \omega) n_j(X)$ representa o gradiente espacial projetado da pressão acústica, i.e., o fluxo normal à interface. A equação mostra como perturbações acústicas resultam em movimento no meio poroelástico.

Por último, a equação (2.10) estabelece que o fluxo normal do fluido poroso dentro do sólido poroelástico, representado por $p_j^A(X, \omega) n_j(X)$, deve ser anulado na interface. Neste cenário de interface selada, não há fluxo de fluido entre os dois meios, e essa condição reflete essa ausência de fluxo.

3. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS (MEF)

Nesta seção, faremos uma breve introdução às equações fundamentais para a modelagem acústica e porodinâmica utilizando o Método de Elementos Finitos (MEF).

3.1. Modelagem Acústica

O conjunto de equações no domínio da frequência resultante da discretização espacial por meio de elementos finitos do modelo acústico mencionado na Seção 2.1 é expresso por [6]:

$$\mathbf{K}_A \mathbf{P}(X, \omega) - \omega^2 \mathbf{M}_A \mathbf{P}(X, \omega) = \mathbf{F}_A \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{M}$ e $\mathbf{K}$ representam as matrizes de massa e rigidez do modelo, respectivamente, enquanto $\mathbf{F}$ e $\mathbf{P}$ são vetores de excitações nodais e pressão hidrodinâmica, respectivamente (o subscrito A refere-se ao subdomínio acústico). As matrizes e vetores envolvidos na Eq. (3.1) são definidas no nível do elemento da seguinte forma:

$$\mathbf{M}_A = \int_{\Omega} \mathbf{N}_A^T \rho_A \mathbf{N}_A d\Omega \quad (3.2)$$

$$\mathbf{K}_A = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_A)^T k_A (\nabla \mathbf{N}_A) d\Omega \quad (3.3)$$

$$\mathbf{F}_A = \mathbf{T}_A + \mathbf{Y}_A = \int_{\Gamma} \mathbf{N}_A^T k_A \bar{q}_A d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{N}_A^T s_A d\Omega \quad (3.4)$$

Neste contexto, $\mathbf{N}$ e ∇ representam o vetor de interpolação e o operador de gradiente, respectivamente, enquanto $\bar{q}_A$ e s denotam excitações de superfície e domínio, respectivamente. Além disso, conforme descrito na Eq. (3.4), $\mathbf{T}$ e $\mathbf{Y}$ referem-se às contribuições vetoriais nodais correspondentes.

3.2. Modelagem Porodinâmica

Considerando as práticas convencionais do método dos elementos finitos e a introdução de aproximações espaciais para os deslocamentos e pressões do modelo poroso, podemos derivar o seguinte conjunto de equações no domínio de frequência, tendo em vista o modelo poroelástico descrito na Seção 2.2 [2]:

$$\mathbf{K}_P \mathbf{U}(X, \omega) - \omega^2 \mathbf{M}_P \mathbf{U}(X, \omega) - \mathbf{Q}_P \mathbf{P}(X, \omega) = \mathbf{F}_P^s \quad (3.5)$$

$$\mathbf{H}_P \mathbf{P}(X, \omega) + \omega i \mathbf{S}_P \mathbf{P}(X, \omega) + \omega i \mathbf{Q}_P^T \mathbf{U}(X, \omega) = \mathbf{F}_P^f \quad (3.6)$$

onde as matrizes $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{S}$ e $\mathbf{Q}$ representam as matrizes de rigidez, massa, permeabilidade, compressibilidade e acoplamento do modelo, respectivamente. As variáveis $\mathbf{U}$ e $\mathbf{P}$ representam os vetores de deslocamento e poro-pressão, respectivamente. Os vetores $\mathbf{F}$ denotam as excitações nodais (onde o subscrito P refere-se ao subdomínio poroelástico).

Os componentes das matrizes e vetores, conforme expressos nas equações (3.5) e (3.6), são determinados, em nível do elemento, da seguinte forma:

$$\mathbf{M}_P = \int_{\Omega} \mathbf{N}_s^T \rho_m \mathbf{N}_s d\Omega \quad (3.7)$$

$$\mathbf{K}_P = \int_{\Omega} \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s d\Omega \quad (3.8)$$

$$\mathbf{Q}_P = \int_{\Omega} \mathbf{B}_s^T \alpha \mathbf{m} \mathbf{N}_f d\Omega \quad (3.9)$$

$$\mathbf{F}_P^s = \mathbf{T}_P^s + \mathbf{Y}_P^s = \int_{\Gamma} \mathbf{N}_s^T \bar{\tau}_s d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{N}_s^T \mathbf{b}_s d\Omega \quad (3.10)$$

$$\mathbf{H}_P = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_f)^T \kappa_f (\nabla \mathbf{N}_f) d\Omega \quad (3.11)$$

$$\mathbf{S}_P = \int_{\Omega} \mathbf{N}_f \frac{1}{Q^*} \mathbf{N}_f d\Omega \quad (3.12)$$

$$\mathbf{F}_p^f = \mathbf{T}_p^f + \mathbf{Y}_p^f = \int_{\Gamma} \mathbf{N}_f^T \kappa_f \bar{q}_f d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{N}_f^T s_f d\Omega \quad (3.13)$$

Estas equações seguem o esquema de notação previamente estabelecido, e $\mathbf{m} = [1 \ 1 \ 0]^T$ é uma representação vetorial do delta de Kronecker. O super/subscrito f refere-se à fase do fluido do meio poroso, enquanto o s refere-se à fase sólida.

4. ACOPLAMENTO ITERATIVO

Para viabilizar o acoplamento entre diversos subdomínios físicos distintos, empregamos uma abordagem iterativa que atualiza as variáveis pertinentes nas interfaces compartilhadas. Essa estratégia se baseia na imposição de condições de contorno nas interfaces em comum. Cada subdomínio é analisado de maneira independente, e seus sistemas de equações são resolvidos separadamente para cada frequência durante o processo iterativo. Isso nos permite utilizar discretizações independentes em cada subdomínio, eliminando a necessidade de nós coincidentes nas interfaces compartilhadas.

A fim de garantir a convergência e agilizar o processo iterativo, introduzimos um parâmetro de relaxamento, denominado λ , no algoritmo de acoplamento iterativo. A seleção apropriada e a estratégia para esse parâmetro desempenham um papel fundamental na prevenção de iterações excessivas ou mesmo de falhas na convergência. O parâmetro de relaxamento é aplicado às variáveis fundamentais em todas as interfaces possíveis (conforme detalhado na seção 2.4), assegurando sua presença em todas as interfaces enquanto o mesmo é calculado globalmente.

4.1. Acoplamento de Meios Acústicos e Poroelásticos

Dentro do contexto do modelo de interação entre meios acústicos e poroelásticos, as condições de contorno nas interfaces de acoplamento, como definidas nas equações (2.8) a (2.10), são fundamentais para a integração dos dois domínios físicos. Nesse caso, são impostas condições naturais nas interfaces compartilhadas em cada subdomínio. Isso significa que os deslocamentos calculados nos subdomínios poroelásticos são utilizados para determinar os fluxos nos subdomínios acústicos (como indicado na Equação (2.9)), e as pressões hidrodinâmicas calculadas nos subdomínios acústicos são usadas para derivar as trações nos subdomínios poroelásticos (conforme a Equação (2.8)). Vale ressaltar que, neste estudo, não consideramos nenhum fluxo de fluido através da interface de acoplamento, conforme especificado na Equação (2.10).

Introduzimos um parâmetro de relaxamento para atualizar as pressões hidrodinâmicas avaliadas nos subdomínios acústicos (expressas como ${}^I\mathbf{P}_A^{(k+\lambda)}(w)$), conforme a equação abaixo:

$${}^I\mathbf{P}_A^{(k+1)}(w) = (\lambda) {}^I\mathbf{P}_A^{(k+\lambda)}(w) + (1 - \lambda) {}^I\mathbf{P}_A^{(k)}(w) \quad (4.1)$$

Dessa forma, seguimos com a resolução independente de cada subdomínio do modelo acoplado, calculando $\mathbf{U}_p^{(k+1)}(w)$, $\mathbf{P}_p^{(k+1)}(w)$ e $\mathbf{P}_A^{(k+1)}(w)$ em cada etapa iterativa. As relações de interface, que utilizam ${}^I\mathbf{U}_p^{(k+1)}(w)$ para avaliar ${}^I\mathbf{T}_A^{(k+1)}(w)$ e ${}^I\mathbf{P}_A^{(k+1)}(w)$ para estabelecer ${}^I\mathbf{T}_p^{(k+1)}(w)$, são consideradas iterativamente até que convergência seja alcançada.

4.2. Discretização Espacial Desconexa

Quando aplicamos a discretização espacial em cada sub-região resultante de uma malha descontínua na interface, precisamos lidar com a interpolação das condições de contorno. Essas condições de contorno podem ser espacialmente interpoladas usando funções de forma existentes. A Equação (4.2) descreve esse processo de interpolação, fornecendo uma interpolação da condição ${}^I\mathbf{P}_A^{(k+1)}(w)$ em uma posição necessária $\bar{X}$, denominada ${}^I\mathbf{P}'_A^{(k+1)}(w)$.

$${}^I\mathbf{P}'_A^{(k+1)}(w) = \int_{\Gamma_I} \delta(X - \bar{X}) \mathbf{N}_A(X) d\Gamma {}^I\mathbf{P}_A^{(k+1)}(w) \quad (4.2)$$

onde δ corresponde a uma representação da função Delta de Dirac.

Nesse contexto, a excitação nodal ${}^I\mathbf{T}_p^{s(k+1)}(w)$ é determinada por meio da integração de ${}^I\mathbf{P}'_A^{(k+1)}(w)$, como expresso na Equação (4.3), onde $\mathbf{n}$ representa o vetor normal à interface (conforme especificado pela relação (2.8)).

$${}^I\mathbf{T}_p^{s(k+1)}(w) = - \int_{\Gamma_I} \mathbf{N}_s^T(X) \mathbf{n}(X) \mathbf{N}_f(X) d\Gamma {}^I\mathbf{P}'_A^{(k+1)}(w) \quad (4.3)$$

De forma análoga, pode-se obter ${}^I\mathbf{T}_A^{(k+1)}(w)$ a partir de ${}^I\mathbf{U}_p^{(k+1)}(w)$ no caso de interfaces desconexas, tendo-se em consideração a expressão (2.9).

4.3. Parâmetro de Relaxamento λ

O parâmetro de relaxamento, λ , é determinado por meio da minimização da função de erro [8]:

$$f(\lambda) = \| {}^I\mathbf{P}_A^{(k+1)}(\lambda) - {}^I\mathbf{P}_A^{(k)}(\lambda) \|^2 \quad (4.4)$$

No contexto do acoplamento mencionado, o parâmetro de relaxamento é aplicado para garantir a convergência e/ou acelerar o processo nas condições essenciais de contorno $\mathbf{P}_A(w)$. Ele é calculado com base nas iterações $(k+1)$ e (k) .

Usando a equação (4.1), podemos expressar as seguintes equações (4.5) e (4.6):

$${}^I\mathbf{P}_A^{(k+1)} = \lambda {}^I\mathbf{P}_A^{(k+\lambda)} + (1 - \lambda) {}^I\mathbf{P}_A^{(k)} \quad (4.5)$$

$${}^I\mathbf{P}_A^{(k)} = \lambda {}^I\mathbf{P}_A^{(k+\lambda-1)} + (1 - \lambda) {}^I\mathbf{P}_A^{(k-1)} \quad (4.6)$$

Ao substituir as equações (4.5) e (4.6) na equação (4.4) acima, obtemos:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \|(\lambda)\mathbf{W}^{(k+\lambda)} + (1 - \lambda)\mathbf{W}^{(k+\lambda)}\|^2 \\ &= (\lambda^2)\|\mathbf{W}^{(k+\lambda)}\|^2 \\ &\quad + 2\lambda(1 - \lambda)(\mathbf{W}^{(k+\lambda)}, \mathbf{W}^{(k)}) \\ &\quad + (1 - \lambda)^2\|\mathbf{W}^{(k)}\|^2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Nessa equação, a definição de produto interno usada é $(\mathbf{W}, \mathbf{W}) = \|\mathbf{W}\|^2$ e $\mathbf{W}^{(k+\lambda)} = {}^I\mathbf{P}_A^{(k+\lambda)} - {}^I\mathbf{P}_A^{(k+\lambda-1)}$.

Para encontrar o valor ótimo de λ que minimiza $f(\lambda)$, diferenciamos a equação (4.7) em relação a λ e igualamos o resultado a zero, resultando em:

$$\begin{aligned} \lambda\|\mathbf{W}^{(k+\lambda)}\|^2 + (1 - 2\lambda)(\mathbf{W}^{(k+\lambda)}, \mathbf{W}^{(k)}) \\ + (\lambda - 1)\|\mathbf{W}^{(k)}\|^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Ao rearranjar a equação acima, obtemos o valor ótimo de λ :

$$\lambda = \frac{(\mathbf{W}^{(k)}, \mathbf{W}^{(k)} - \mathbf{W}^{(k+\lambda)})}{\|\mathbf{W}^{(k)} - \mathbf{W}^{(k+\lambda)}\|^2} \quad (4.9)$$

Essa expressão é eficiente computacionalmente e fácil de implementar, fornecendo um valor ótimo para o parâmetro de relaxamento λ em cada etapa iterativa. Vale destacar que o parâmetro de relaxamento calculado é um número complexo, uma vez que o problema é formulado no domínio da frequência. No entanto, para os casos discutidos aqui, é considerado um valor real inicial de $\lambda=0.5$, uma vez que o processo iterativo é relativamente insensível ao valor inicial do parâmetro de relaxamento.

5. EXEMPLO NUMÉRICO

Nesta seção, apresentaremos um exemplo prático para demonstrar o funcionamento da metodologia proposta. Neste exemplo, uma coluna heterogênea é analisada. No caso, a coluna é composta apenas por materiais poroelásticos e acústicos. Um esquema do modelo é mostrado na Figura 1. A superfície superior da coluna é considerada drenada e carregada de forma uniforme, levando em conta uma variação de tempo do tipo Heaviside com uma amplitude de $3 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$, como mostrado no domínio de frequência na Figura 2. As outras superfícies do modelo são não drenadas e têm deslocamentos normais prescritos iguais a zero.

Para facilitar a conversão entre os domínios de tempo e frequência e suas respectivas representações nas implementações convencionais da Transformada Rápida de Fourier (FFT), é crucial acrescentar uma zona silenciosa ao final do histórico de força preenchida com zeros. Essa prática, associada com a introdução de amortecimento ao modelo, é indispensável para a dissipação de vibrações livres após a atuação da força. O comprimento da zona silenciosa depende do período fundamental do sistema e da extensão do

amortecimento. Neste sentido é aqui utilizado o Exponential Window Method (EWM) [10], uma técnica usada para estabelecer de forma confiável a zona silenciosa desejada e combater a distorção de frequência (aliasing).

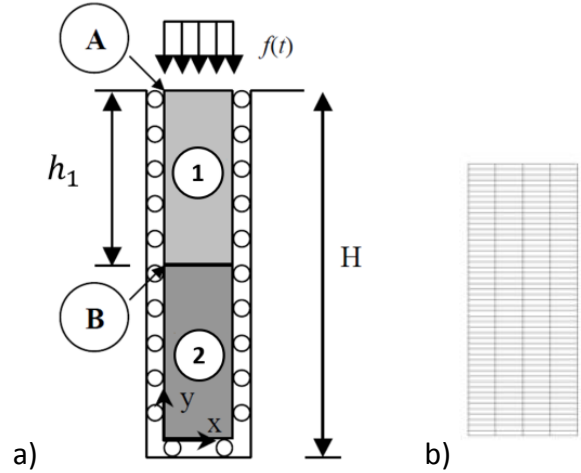


Figura 1 - Esquema da coluna acoplada: (a) modelo poro/acustico; (b) malha adotada de MEF para cada subdominio.

Infelizmente, não há uma solução analítica conhecida para o modelo poro/acústico acoplado em foco; no entanto, um modelo equivalente foi avaliado numericamente em [11]. As discretizações do MEF adotadas também são mostradas na Figura 1. As propriedades físicas do domínio acústico (meio 2) são $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ (densidade de massa) e $k = 2 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$ (compressibilidade). Da mesma forma, as propriedades físicas do meio poroso incompressível (meio 1) são $\rho_s = 2000 \text{ kg/m}^3$ (densidade de massa da fase sólida), $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$ (densidade de massa da fase fluida), $\eta = 0.3$ (porosidade) e $\kappa = 10^6 \text{ m}^4/\text{Ns}$ (permeabilidade). Valores zero são considerados para o coeficiente de Poisson do meio poroso e para $1/Q^*$. Para o módulo de Young, $E = 2 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$ é adotado.

Os resultados no domínio de frequência para os deslocamentos verticais nos pontos A ($x = 0$ e $y = H$) da coluna (ver Figura 1) são apresentados na Figura 3a. As respostas transformadas para o domínio de tempo também são mostradas na Figura 3b, levando em consideração a resposta de referência [11], ilustrando a boa precisão dos resultados calculados. Da mesma forma, a Figura 4a apresenta o deslocamento do ponto B ($x = 0$ e $y = H/2$), e na Figura 4b, esses deslocamentos são apresentados no domínio do tempo e comparados novamente com [11]. Para o ponto B, é possível avaliar as poro-pressões na Figura 5a e depois também convertê-las para o domínio do tempo, conforme ilustrado na Figura 5b. Como pode ser observado, como esperado, pouca diferença é observada nas respostas em comparação com a resposta de referência, mesmo após os procedimentos de transformação de domínio.

A Figura 6 ilustra o desempenho do algoritmo de acoplamento iterativo. Esta figura descreve o número total de iterações para cada frequência. Como pode ser observado,

poucas etapas iterativas são necessárias para a convergência levando em consideração a formulação de acoplamento proposta, destacando a eficácia da técnica.

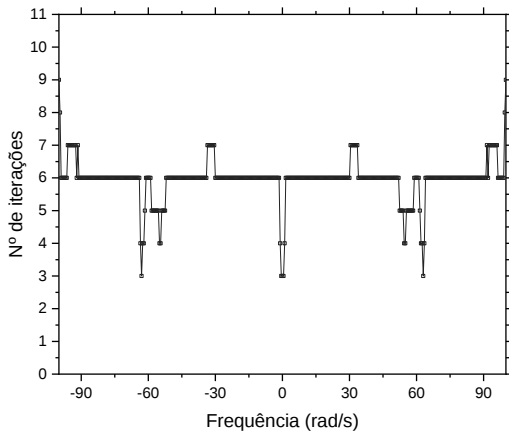
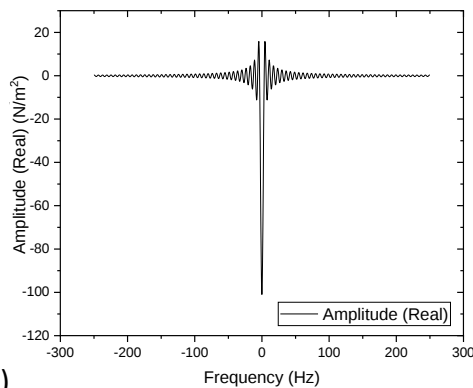


Figura 6 - Número de iterações por frequência.

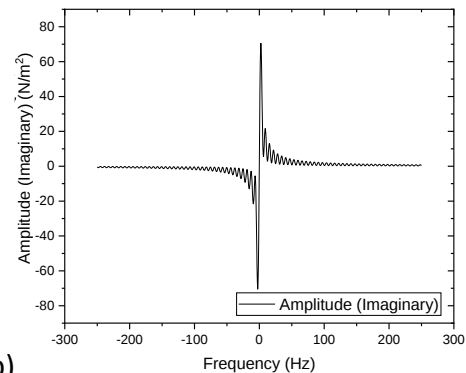
6. CONCLUSÃO

Neste artigo, discute-se uma metodologia robusta para a análise dinâmica de sistemas complexos acoplados. Foi apresentado um exemplo numérico para demonstrar a eficácia e versatilidade da abordagem apresentada. Nesse exemplo, uma coluna composta por materiais poroelásticos e acústicos é analisada. Através das avaliações numéricas, demonstra-se a precisão dos resultados calculados. O algoritmo de acoplamento iterativo provou ser altamente eficiente, requerendo apenas algumas etapas iterativas para convergência.

A capacidade desta metodologia de analisar de forma simples e eficiente a interação de diferentes domínios físicos e capturar com precisão suas respectivas respostas dinâmicas abre possibilidades para uma ampla gama de aplicações em engenharia estrutural, geotecnia e outras áreas onde interações multi-físicas desempenham um papel crucial. Pesquisas futuras nessa área podem refinar e expandir ainda mais esta abordagem, oferecendo insights ainda maiores sobre o comportamento de sistemas complexos.

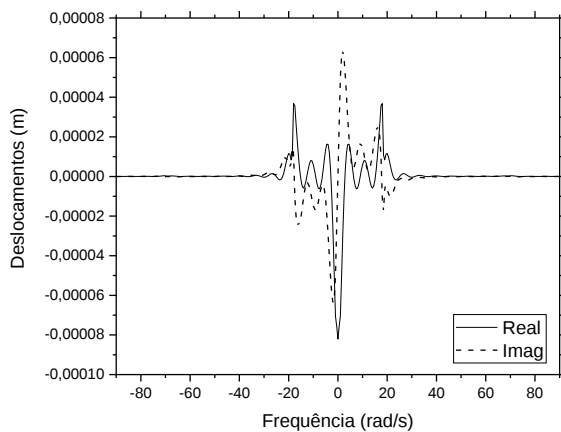


a)

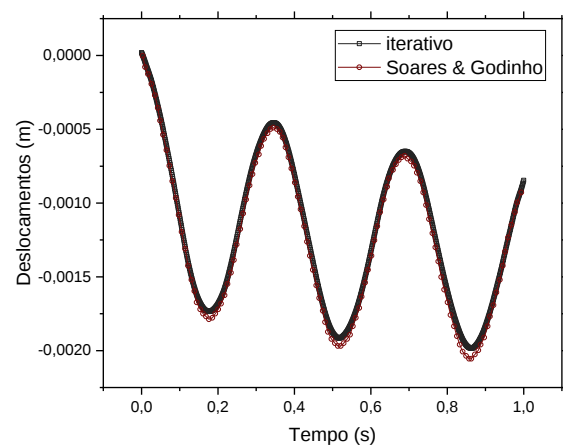


b)

Figura 2 - Carga uniforme transformada para o domínio de frequência, com amortecimento periódico (EWN): a) Parte real; b) Parte imaginária.



a)



b)

Figura 3 - Deslocamentos verticais do ponto A: (a) na frequência; (b) no tempo.

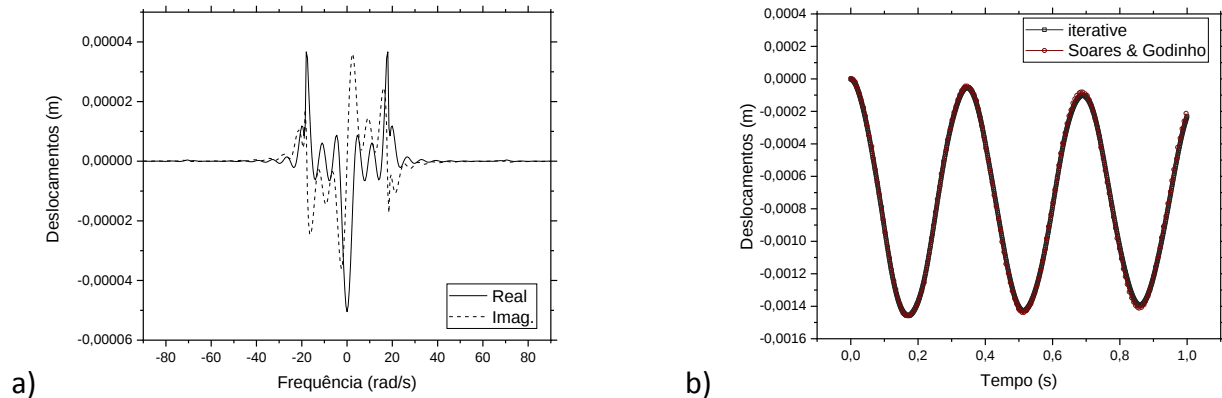


Figura 4 - Deslocamentos verticais do ponto B: (a) na frequência; (b) no tempo.

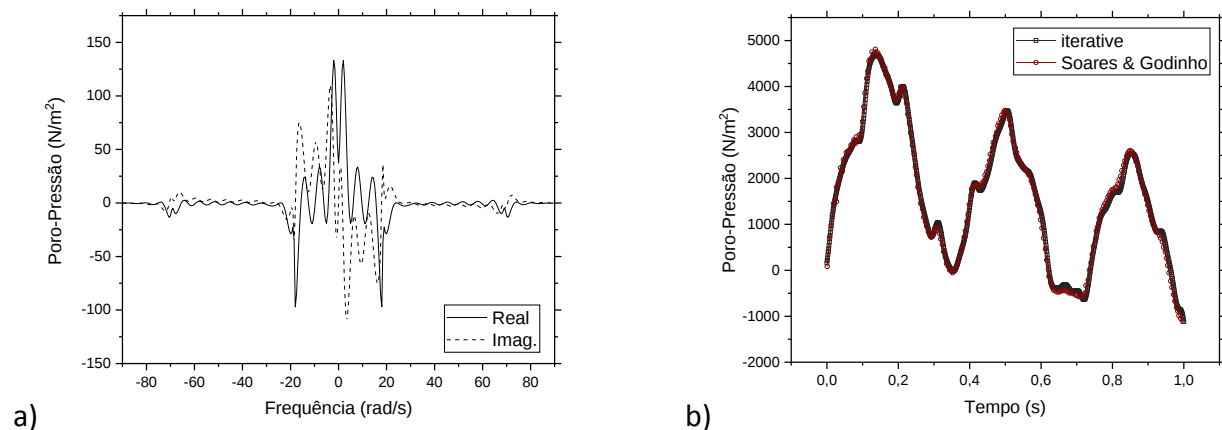


Figura 5 - Poro-Pressões do ponto B: (a) na frequência ; (b) no tempo.

6. AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi parcialmente financiado pela FCT/MCTES através de fundos nacionais (PIDDAC) no âmbito da Unidade de I&D Instituto de Sustentabilidade e Inovação em Engenharia de Estruturas (ISISE), sob a referência UIDB/04029/2020, e no âmbito do Laboratório Associado Produção Avançada e Sistemas Inteligentes ARISE sob referência LA/P/0112/2020, no âmbito do projeto IntRail, com a referência PTDC/ECI-EGC/3352/2021. O apoio financeiro fornecido pelo CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) e pela FAPEMIG (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais) também é amplamente reconhecido.

7. BIBLIOGRAFIA

[1] Zienkiewicz, Taylor. The finite element method –vol. 1. oxford: butter- worth-heinemann; 2002.
[2] Zienkiewicz, Olgierd C., et al. Computational geomechanics. chichester: wiley, 1999.
[3] Batchelor, C. K.; Batchelor, G. K. An introduction to fluid dynamics. cambridge university press, 1967.

[4] Biot, M. A., Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. 1. low-frequency range, j. acoust. soc. am. 28 (1956) 168–178.
[5] Biot, M. A., Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. 2. higher frequency range, j. acoust. soc. am. 28 (1956) 179–191.
[6] Bathe, K.J., Finite element procedures, prentice-hall, 1996
[7] Hughes T. Jr. the finite element method—linear static and dynamic finite element analysis. mineola, new york: dover publications; 2000.
[8] Soares D, Rodrigues G.G., Gonçalves K.A., An efficient multi-time-step implicitexplicit method to analyze solid-fluid coupled systems discretized by unconditionally stable time-domain finite element procedures. Computers & Structures, v. 88, p. 387-394, 2010.
[9] Matuszyk, P. J.; Demkowicz, L. F., Solution of coupled poroelastic/acoustic/elastic wave propagation problems using automatic hp-adaptivity. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2014, 281: 54-80.
[10] Kausel, E.; Roësset, J. M. Frequency domain analysis of undamped systems. Journal of Engineering Mechanics, 1992, 118.4: 721-734.
[11] Soares, D.; Godinho, L. Nonlinear analysis of interacting saturated porous and elastic media by time-domain FEM/BEM iterative coupling procedures. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2020, 117: 299-308.